

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

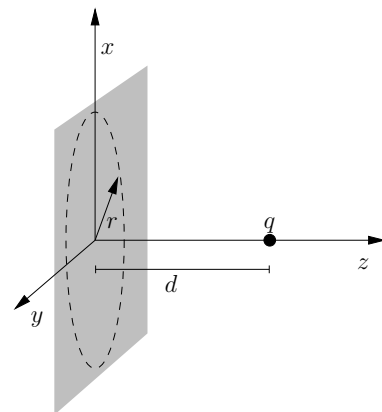
Compito di Fisica 2 (19/01/2012)

1

Una carica puntiforme q si trova sull'asse z a distanza d da un piano infinito, perfettamente conduttore, la cui superficie coincide col piano xy . Si mostri che

a)* il campo elettrico $\mathbf{E}_s$ alla superficie del conduttore ($z = 0$) è dato da

$$\mathbf{E}_s = -2 \frac{\hat{\mathbf{z}}}{4\pi\epsilon_0} \frac{q d}{(r^2 + d^2)^{3/2}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (1)$$



b)* la carica contenuta in un cerchio di raggio r sulla superficie del conduttore è data da

$$Q(r) = -q \left[1 - \frac{d}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right] \quad (2)$$

Si supponga ora che la carica q si stia muovendo *lentamente* per $t > 0$ con velocità uniforme $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{z}}$ lungo l'asse z perpendicolare al piano del conduttore, ovvero $d = Vt$. Usando l'approssimazione di correnti lentamente variabili, calcolare

c) la densità di *corrente* superficiale,

d) il campo *magnetico* generato vicino alla superficie del conduttore ($z = 0^+$).

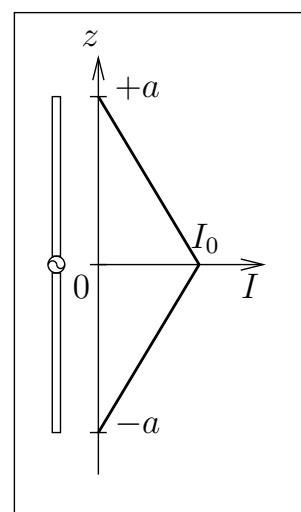
2

Un'antenna rettilinea dipolare alimentata al centro è costituita essenzialmente da un conduttore cilindrico sottile di resistenza R , esteso da $z = -a$ a $z = +a$, in cui scorre la corrente (mantenuta da un opportuno generatore ideale e supposta uniformemente distribuita in direzione trasversa)

$$I = I_0 \left(1 - \frac{|z|}{a} \right) \cos \omega t = \text{Re} \left[I_0 \left(1 - \frac{|z|}{a} \right) e^{-i\omega t} \right]. \quad (3)$$

a)* Mostrare che la potenza media dissipata per effetto Joule nell'antenna è data da

$$P_{\text{dis}} = \frac{R}{6} I_0^2. \quad (4)$$



b)* Mostrare che la densità di carica per unità di lunghezza sull'antenna e il momento di dipolo elettrico sono dati da

$$\ell = \text{Re} \left[\frac{iI_0}{a} \mathcal{E}(z) e^{-i\omega t} \right], \quad \mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}} \text{Re} \left[\frac{iI_0 a}{\omega} e^{-i\omega t} \right], \quad (5)$$

($\mathcal{E}(z) = \pm 1$ se $z > 0$ o $z < 0$, rispettivamente).

c) Calcolare la potenza media P_{irr} irradiata dall'antenna mostrando che si può scrivere $P_{\text{irr}} = \alpha Z_0 I_0^2$ dove $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.73 \, \Omega$ e α è un coefficiente da determinare.

d) Calcolare il rapporto $P_{\text{irr}}/P_{\text{dis}}$ determinando per quali valori di R esso è maggiore di uno, assumendo $a = \lambda/10$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Le domande asteriscate (*) **non** devono essere svolte da chi sostiene **solo la prova di Fisica B2**. Per queste domande **si tenga eventualmente conto del risultato**, senza doverlo dimostrare, per le domande successive.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0 \epsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi \epsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (6)$$

Momento di dipolo elettrico di una distribuzione di carica $\rho(\mathbf{r})$ contenuta nel volume V

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV. \quad (7)$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (8)$$

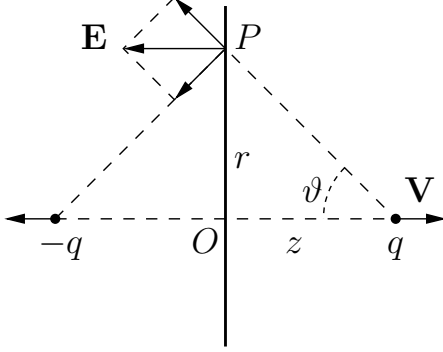
Integrale indefinito

$$\int \frac{x}{(x^2 + a)^{3/2}} dx = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} + C \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) Per comodità diamo direttamente le formule in funzione di $d = Vt$; consistentemente con l'approssimazione di correnti lentamente variabili, in prima istanza trattiamo il campo elettrico come se fosse indipendente dal tempo.



Il campo elettrico nel semispazio in cui la carica si trova è dato dal campo della carica stessa più quello generato dalla carica immagine $-q$ posta in $(0, 0, -Vt)$. In particolare nel punto P , in prossimità del piano conduttore a distanza $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ dall'origine O il campo sarà diretto lungo l'asse z con valore

$$\begin{aligned} E_z &= -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2 + d^2} \cos \vartheta = -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}} \\ &= -2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qVt}{(r^2 + V^2t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (10)$$

b) Alla superficie di un conduttore abbiamo $E = \sigma/\epsilon_0$, da cui $\sigma = \epsilon_0 E$, quindi

$$\sigma(r, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{qVt}{(r^2 + V^2t^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

Per la carica contenuta in un cerchio sul piano conduttore, centrato sull'origine e di raggio r , abbiamo

$$\begin{aligned} Q(r, t) &= -\int_0^r \frac{1}{2\pi} \frac{qVt}{(r'^2 + V^2t^2)^{3/2}} 2\pi r' dr' = -qVt \int_0^r \frac{r' dr'}{(r'^2 + V^2t^2)^{3/2}} = -qVt \left[\frac{1}{Vt} - \frac{1}{\sqrt{r^2 + V^2t^2}} \right] \\ &= -q \left[1 - \frac{Vt}{\sqrt{r^2 + V^2t^2}} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

dove abbiamo usato la (9).

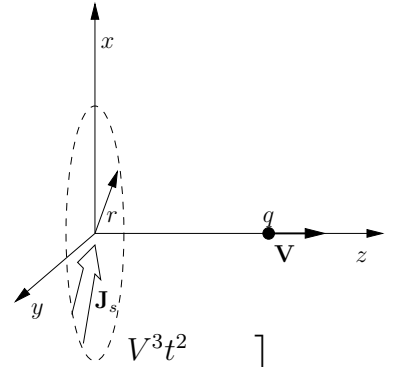
c) Consideriamo un cerchio di raggio r , centrato attorno all'origine e contenente, come abbiamo visto, la carica $Q(r, t)$. Con le nostre condizioni di simmetria, la densità di corrente superficiale $J_s = J_s(r, t)$ deve essere diretta radialmente nel piano e, per l'equazione di continuità, vale

$$2\pi r J_s(r, t) = -\partial_t Q(r, t), \quad (13)$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned} J_s(r, t) &= +\frac{q}{2\pi r} \frac{\partial}{\partial t} \left[1 - \frac{Vt}{\sqrt{r^2 + V^2t^2}} \right] = -\frac{q}{2\pi r} \left[\frac{V}{\sqrt{r^2 + V^2t^2}} - \frac{V^3t^2}{(r^2 + V^2t^2)^{3/2}} \right] \\ &= -\frac{q}{2\pi r} \frac{V}{\sqrt{r^2 + V^2t^2}} \left[1 - \frac{V^2t^2}{r^2 + V^2t^2} \right] = -\frac{q}{2\pi r} \frac{V}{\sqrt{r^2 + V^2t^2}} \frac{r^2}{r^2 + V^2t^2} \\ &= -\frac{qVr}{2\pi(r^2 + V^2t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Il vettore $\mathbf{J}_s$ è quindi diretto verso l'origine.

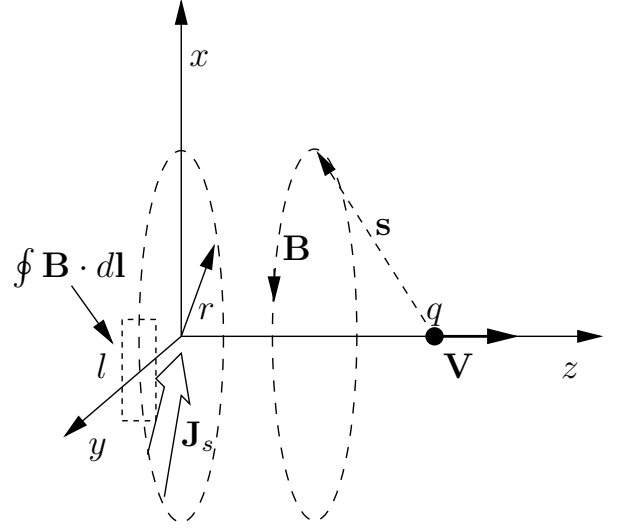


d) Per simmetria le linee di forza di $\mathbf{B}$ saranno circonferenze con l'asse z come asse. Il campo magnetico può essere calcolato in tre modi diversi. Applicando la legge di Biot e Savart

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q \mathbf{V} \times \mathbf{s}}{s^3} \quad (15)$$

alla carica reale e alla carica immagine, ottenendo, in prossimità del piano conduttore

$$\begin{aligned} B(r, t) &= 2 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qV \sqrt{r^2 + V^2 t^2}}{(r^2 + V^2 t^2)^{3/2}} \frac{r}{\sqrt{r^2 + V^2 t^2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} qV \frac{r}{(r^2 + V^2 t^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (16)$$



In alternativa si può calcolare la circuitazione $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ sul percorso ℓ indicato in figura, tenendo conto che $\mathbf{B}$ è nullo per $z < 0$:

$$\oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = Bl = \mu_0 \int J_s dl = \mu_0 l \frac{qVr}{2\pi(r^2 + V^2 t^2)^{3/2}} \quad (17)$$

da cui abbiamo ancora

$$B(r, t) = \mu_0 J_s(r, t) = \frac{\mu_0}{2\pi} qV \frac{r}{(r^2 + V^2 t^2)^{3/2}}. \quad (18)$$

Infine, si può calcolare la circuitazione di $\mathbf{B}$ sul cerchio, che deve essere uguale al flusso della corrente di spostamento:

$$2\pi r B(r, t) = \oint_{\ell} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \epsilon_0 \partial_t \int \frac{\sigma}{\epsilon_0} dS = -\mu_0 \partial_t Q(r, t), \quad (19)$$

da cui si ottiene nuovamente

$$B(r, t) = \mu_0 J_s(r, t). \quad (20)$$

2

a)* Poiché la corrente non è omogenea consideriamo l'antenna come una serie di resistenze infinite-sime $dR = (R/2a)dz$. La potenza dissipata, mediata su un periodo, sarà data dall'integrale esteso a tutto il conduttore

$$P_{\text{dis}} = \int \langle I^2 \rangle dR = \int_{-a}^a \frac{I_0^2}{2} \left(1 - \frac{|z|}{a}\right)^2 \frac{R}{2a} dz = 2 \int_0^a \frac{I_0^2}{2} \left(1 - \frac{z}{a}\right)^2 \frac{R}{2a} dz = \frac{I_0^2 R}{6}. \quad (21)$$

b)* La densità di carica per unità di lunghezza sull'antenna deve soddisfare l'equazione di continuità, che in notazione complessa assume la forma

$$\partial_t \ell = -i\omega \ell = -\partial_z I = \frac{I_0}{a} \mathcal{E}(z) e^{-i\omega t}, \quad (22)$$

da cui si ottiene

$$\ell = \text{Re} \left[\frac{iI_0}{\omega a} \mathcal{E}(z) e^{-i\omega t} \right] = \frac{I_0}{\omega a} \mathcal{E}(z) \sin \omega t. \quad (23)$$

Per simmetria l'unica componente non nulla è quella lungo $\hat{\mathbf{z}}$, perciò si ha

$$p_z = \int_{-a}^a z \ell(z, t) dz = 2 \frac{iI_0}{\omega a} e^{-i\omega t} \int_0^a z dz = \frac{iI_0 a}{\omega} e^{-i\omega t}, \quad (24)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{p} = \hat{\mathbf{z}} \text{Re} \left[\frac{iI_0 a}{\omega} e^{-i\omega t} \right] = \hat{\mathbf{z}} \frac{I_0 a}{\omega} \sin \omega t. \quad (25)$$

c) La potenza irradiata dall'antenna, in media su un periodo, è la potenza di un dipolo oscillante parallelo all'asse z . Si ha perciò

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} \langle \dot{p}_z^2(t) \rangle = \frac{2}{12\pi\epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4}{2} \left(\frac{I_0 a}{\omega} \right)^2 = \frac{1}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 \left(\frac{\omega a}{c} \right)^2 = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2. \quad (26)$$

d) Da **a)** e **c)** si ottiene

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{dis}}} = 2\pi \frac{Z_0}{R} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^2. \quad (27)$$

Se $a/\lambda = 1/10$ deve essere $R < 2\pi \times 10^{-2} \times Z_0 = 11.82 \, \Omega$ affinché l'energia irradiata sia maggiore di quella dissipata.