

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2011-2012

Compito di Fisica 2 (18/01/2013)

1

Una spira circolare di raggio a , resistenza R e autoinduzione trascurabile è posta in un campo magnetico uniforme e oscillante $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos \omega t$ che forma un angolo θ col piano della spira.

a) Calcolare la forza elettromotrice (f.e.m.) indotta e la potenza dissipata nella spira (mediata sul periodo di oscillazione).

Si consideri ora un'onda elettromagnetica piana, avente lunghezza d'onda $\lambda \gg a$, linearmente polarizzata e avente ampiezza del campo elettrico E_0 , incidente su un'antenna ricevente circolare schematizzabile come la spira sopra descritta.

b) Calcolare la f.e.m. indotta nell'antenna in funzione dell'angolo di incidenza dell'onda rispetto al piano della spira e nei due casi in cui la polarizzazione è o parallela al piano della spira o giace nel piano ortogonale alla spira stessa.

c) Calcolare, nel caso di polarizzazione parallela alla spira, la potenza media P_{irr} diffusa dall'antenna e mostrare che si può scrivere, a meno di coefficienti numerici adimensionali,

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{dis}}} \propto \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k \left(\frac{Z_0}{R}\right)^l, \quad \frac{P_{\text{irr}}}{I} \propto \pi a^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^m \left(\frac{Z_0}{R}\right)^n, \quad (1)$$

dove P_{dis} è la potenza dissipata, I è l'intensità dell'onda incidente, $Z_0 = (\varepsilon_0 c)^{-1} = 376.73 \, \Omega$ e k, l, m e n sono coefficienti interi da determinare.

2

Si consideri un filo infinito lungo il quale si trova la densità lineare di carica ℓ e scorre l'intensità di corrente I .

a) Assumendo ℓ e I uniformi e costanti, scrivere le espressioni del campo elettrico e del campo magnetico in tutto lo spazio.

Si supponga ora che

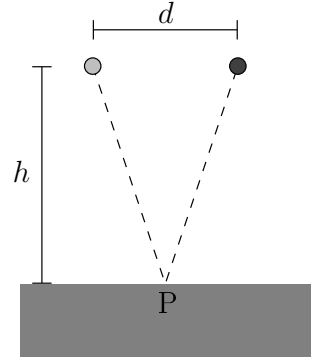
$$\ell = \ell(z, t) = \ell_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad I = I(z, t) = I_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad (2)$$

dove z è la coordinata lungo il filo.

b) Si usi l'equazione di continuità per la carica elettrica per determinare una relazione tra ℓ_0 , I_0 e la velocità di fase $v_f = \omega/k$.

c) Assumendo che i campi elettromagnetici siano dati da $\mathbf{E}(r, z, t) = \mathbf{E}(r) e^{ikz - i\omega t}$ e $\mathbf{B}(r, z, t) = \mathbf{B}(r) e^{ikz - i\omega t}$ dove $\mathbf{E}(r)$ e $\mathbf{B}(r)$ sono le soluzioni statiche trovate al punto **a)** e r è la distanza radiale dal filo, si determini v_f dalle equazioni di Maxwell.

d) Una linea di trasmissione è formata da due fili del tipo sopra descritto nei quali le densità di carica e le intensità di corrente sono rispettivamente $\pm\ell(z, t)$ e $\pm I(z, t)$ posti a distanza d . Si supponga che la linea sia sospesa a un'altezza h dalla superficie terrestre. Calcolare il campo elettrico e magnetico generato alla superficie terrestre sull'asse P equidistante dai fili, sia trascurando l'effetto della Terra sia trattando quest'ultima come un conduttore perfetto. Si diano stime numeriche assumendo come valori tipici $I_0 = 10^3$ A, $d = 5$ m, $h = 30$ m e $\omega = 2\pi \times 50$ s⁻¹.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche:

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{12} \text{ F/m}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2, \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2, \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) \quad (3)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (4)$$

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}. \quad (5)$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea emessa da un dipolo magnetico $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$

$$P = \frac{2k_0}{3c^5} \ddot{\mathbf{m}}^2(t). \quad (6)$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)). \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S} = \pi a^2 B_0 \sin \theta \cos \omega t$, da cui la f.e.m. $\mathcal{E} = -d_t \Phi = \omega \pi a^2 B_0 \sin \theta \sin \omega t$ e la potenza dissipata $P_{\text{dis}} = \langle \mathcal{E}^2 / R \rangle = (\omega B_0 \pi a^2 \sin \theta)^2 / 2R$.

b) Sia θ l'angolo di incidenza ovvero l'angolo formato dal vettore d'onda $\mathbf{k}$ con la superficie della spira. Poiché i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ formano con $\mathbf{k}$ una terna ortogonale, per polarizzazione parallela alla superficie della spira $\mathbf{B}$ forma un angolo θ con la normale alla superficie, quindi (nel limite $a \ll \lambda$) il flusso di $\mathbf{B}$ è dato dalla stessa espressione del punto a) con $B_0 = E_0/c$. Se invece la polarizzazione giace nel piano ortogonale alla superficie allora $\mathbf{B}$ è parallelo alla superficie stessa e il flusso è nullo.

c) Il momento magnetico della spira è dato in modulo da $|\mathbf{m}| = \pi a^2 i$ dove $i = \mathcal{E}/R$. Dato che $\ddot{\mathbf{m}} = -\omega^2 \mathbf{m}$, La potenza irradiata in approssimazione di radiazione di dipolo magnetico è quindi (in media sul periodo)

$$P_{\text{irr}} = 2 \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^4 \langle \mathcal{E}^2 \rangle}{3c^5 R^2}, \quad (8)$$

e quindi

$$P_{\text{irr}} = 2 \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^4}{3c^5 R} P_{\text{dis}}. \quad (9)$$

Il fattore di proporzionalità può essere riscritto come

$$2 \frac{\pi a^4 \omega^4}{12 \varepsilon_0 c^5 R} = 2 \frac{\pi}{12} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^4 \frac{Z_0}{R} = \frac{8\pi^5}{3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 \frac{Z_0}{R}. \quad (10)$$

L'intensità dell'onda incidente è data da $I = |\mathbf{S}| = c\varepsilon_0 E_0^2/2 = c^3 \varepsilon_0 B_0^2/2$, da cui

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^4}{3c^5} \left(\frac{\omega B_0 \pi a^2 \sin \theta}{R} \right)^2 = \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^6 \sin^2 \theta}{6\pi \varepsilon_0^2 c^8 R^2} I = \frac{32\pi^8}{3} \pi a^2 \sin^2 \theta \left(\frac{a}{\lambda} \right)^6 \left(\frac{Z_0}{R} \right)^2 I. \quad (11)$$

2

a) Il campo $\mathbf{E}$ ha simmetria cilindrica ed è radiale. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio r coassiale al piano si ha $2\pi r E_r(r) = \ell/\varepsilon_0$, da cui $E_r(r) = \ell/(2\pi \varepsilon_0 r)$.

Il campo $\mathbf{B}$ ha simmetria cilindrica ed è solenoidale. Applicando il teorema di Ampère ad una circonferenza di raggio r ortogonale e centrata rispetto al filo, si ha $2\pi r B_\phi(r) = \mu_0 I$, da cui $B_\phi(r) = \mu_0 I/(2\pi r)$.

b) L'equazione di continuità per la densità lineare di carica si scrive $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui $-i\omega \ell_0 = -ik I_0$ ovvero $I_0 = v_f \ell_0$.

c) L'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ proiettata in direzione $\hat{\phi}$ fornisce $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$ ovvero, nel caso presente, $ik\ell/\varepsilon_0 = i\omega \mu_0 I_0$. Usando il risultato del punto b) e $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ si ottiene $v_f = c$.

d)

Fissato un piano ortogonale ai fili, nel punto della superficie terrestre equidistante dai fili $r = (h^2 + d^2/4)^{1/2}$. La somma vettoriale dei campi generati da ciascun filo dà

$$\mathbf{E} = 2\hat{\mathbf{x}}\frac{\ell_0}{2\pi\epsilon_0 r}\sin\theta e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{y}}\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin\theta e^{-i\omega t}, \quad (12)$$

essendo $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ le direzioni parallela e ortogonale al piano conduttore (e al piano dei fili), rispettivamente. Essendo $\sin\theta = d/(2r)$, si ha

$$|E_x| = \frac{I_0 d}{2\pi c \epsilon_0 r^2}, \quad |B_y| = \frac{\mu_0 I_0 d}{2\pi r^2} = \frac{|E_x|}{c}. \quad (13)$$

Quindi

$$|B_y| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 5}{2\pi \times (30^2 + 5^2/2^2)} \text{ T} \simeq 10^{-6} \text{ T}, \quad |E_x| \simeq 3 \times 10^2 \text{ V/m}. \quad (14)$$

Per confronto, alla superficie terrestre il campo magnetico medio è $\sim 5 \times 10^{-5} \text{ T}$ e quello elettrico $\sim 1.5 \times 10^2 \text{ V/m}$.

Se consideriamo la Terra come un conduttore perfetto (approssimazione accettabile per le basse frequenze in gioco), possiamo risolvere il problema dei campi introducendo due fili immagine, ciascuno disposto parallelamente al filo reale e in posizione simmetrica rispetto alla superficie terrestre e avente valori opposti di densità di carica e intensità di corrente. Dalla somma vettoriale si vede immediatamente che nel punto della superficie sopra considerato $\mathbf{E} = 0$ e $\mathbf{B} = 0$ come devono, in quanto i campi elettrico e magnetico alla superficie di un conduttore devono essere rispettivamente perpendicolare e parallelo alla superficie stessa.

