

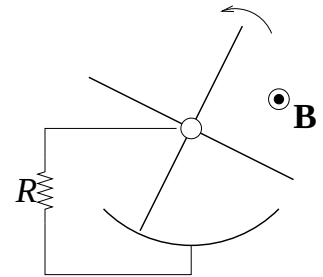
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (29/01/2014)

1

Un generatore di corrente è costituito da un rotatore di momento di inerzia M avente bracci conduttori di raggio a connessi al circuito da contatti striscianti come in figura. La geometria è tale che il contatto è mantenuto sempre e solo con un braccio durante la rotazione. La resistenza R è assunta costante (si trascurano variazioni di lunghezza del circuito). Il sistema è immerso in un campo magnetico $\mathbf{B}$ uniforme e perpendicolare al piano del rotatore. Calcolare, in funzione della velocità angolare istantanea ω ,



- a) la forza elettromotrice indotta e l'intensità di corrente nel circuito,
- b) il momento delle forze magnetiche sul rotatore e la potenza meccanica da esse sviluppata, confrontando quest'ultima con la potenza dissipata nel circuito per effetto Joule,
- c) l'evoluzione temporale di $\omega = \omega(t)$ a partire dalla condizione iniziale $\omega(0) = \omega_0$, in assenza di generatori o motori esterni.

2

Un elettrone si trova in presenza di campi elettrico $\mathbf{E} = E\hat{\mathbf{y}}$ e magnetico $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, con $Bc \gg E$. La velocità è nulla a $t = 0$.

- a) Si studi il moto dell'elettrone, mostrando che esso percorre una *cicloide* della quale si chiedono raggio, frequenza, e velocità di deriva. (Si può usare l'equazione del moto non relativistica, giustificandolo a posteriori.)
- b) Si descriva la radiazione emessa dall'elettrone specificandone frequenza e polarizzazione emessa nelle direzioni $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$, e $\hat{\mathbf{z}}$, e calcolando la potenza irradiata. (Si trascurino del tutto effetti relativistici e Doppler.)
- c) Tenendo conto della perdita di energia per irraggiamento si deduca, anche solo con un ragionamento qualitativo, lo stato di moto dell'elettrone per $t \rightarrow \infty$.
- d) (*facoltativo*) Si tenga conto adesso dell'effetto Doppler all'ordine più basso per calcolare la frequenza della radiazione emessa ad un angolo θ rispetto alla direzione della velocità di deriva.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (2)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} , \quad (3)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\ell = Id\boldsymbol{\ell}$.

Campi di radiazione di dipolo elettrico e dipolo magnetico

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} , \quad \mathbf{E}_m = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^3} . \quad (4)$$

dove $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ è la direzione di emissione.

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (5)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (7)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) La forza elettromotrice, istante per istante, è dovuta alla forza di Lorentz sulle cariche di conduzione che si trovano sull'unico braccio rotante connesso, a quell'istante, ad ambedue i contatti striscianti. Abbiamo quindi

$$\mathcal{E} = \int_0^a B\omega r dr = \frac{1}{2}B\omega a^2, \quad (9)$$

da cui ricaviamo per la corrente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B\omega a^2}{2R}. \quad (10)$$

b) La forza sul tratto infinitesimo di braccio a distanza r dal centro di rotazione e lungo dr vale $df = IBdr$, ed il corrispondente momento della forza vale $d\Gamma = r df = IBr dr$. Per il momento totale delle forze magnetiche sul rotatore abbiamo quindi

$$\Gamma = \int_0^a IBr dr = \frac{B^2\omega a^2}{2R} \int_0^a r dr = \frac{B^2\omega a^4}{4R}, \quad (11)$$

che corrisponde ad una potenza sviluppata pari a

$$W = \Gamma\omega = \frac{B^2\omega^2 a^4}{4R} = R \left(\frac{B\omega a^2}{2R} \right)^2 = RI^2, \quad (12)$$

uguale quindi alla potenza dissipata nel circuito per effetto Joule.

c) L'energia dissipata per effetto Joule è ottenuta a spese dell'energia cinetica del rotore, che vale $K = \frac{1}{2}M\omega^2$. Deve quindi essere

$$W = -\frac{dK}{dt}, \quad \text{da cui} \quad \frac{B^2 a^4 \omega^2}{4MR} = -M\omega \frac{d\omega}{dt}. \quad (13)$$

Separando le variabili abbiamo

$$\frac{d\omega}{\omega} = -\frac{B^2 a^4}{4MR} dt \quad \text{che può essere riscritta} \quad \frac{d\omega}{\omega} = -\frac{dt}{\tau}, \quad \text{con} \quad \tau = \frac{4MR}{B^2 a^4}. \quad (14)$$

Integrando otteniamo finalmente

$$\omega = \omega_0 e^{-t/\tau}. \quad (15)$$

2

a) Nel sistema di riferimento del laboratorio, xyz , la forza complessiva agente sull'elettrone vale $\vec{f} = -e\vec{E} - e\vec{v} \times \vec{B}$, dove $\vec{v}$ è la velocità dell'elettrone. Indicando con m la massa dell'elettrone, le equazioni del moto in forma cartesiana sono così

$$m\ddot{x} = -eB\dot{y} \quad (16)$$

$$m\ddot{y} = eB\dot{x} - eE. \quad (17)$$

Introducendo la variabile $x' = x - (E/B)t \equiv x - vt$ tale che $\dot{x}' = \dot{x} - v$, $\ddot{x}' = \ddot{x}$, le equazioni del moto diventano

$$m\ddot{x}' = -eB\dot{y} \quad (18)$$

$$m\ddot{y} = eB\dot{x}', \quad (19)$$

che sono identiche a quelle per il moto in un campo magnetico uniforme, con condizione iniziale $\dot{x}'(0) = \dot{x}(0) - v = -v$, $\dot{y}(0) = 0$. La soluzione è quindi

$$x' = -(v/\omega) \sin \omega t, \quad y = (v/\omega) \cos \omega t, \quad \omega = eB/m, \quad (20)$$

che descrive un moto circolare uniforme nelle variabili x' e y con frequenza ω e raggio ρ dell'orbita

$$\rho = \frac{v}{\omega} = \frac{mv}{eB} = \frac{mE}{eB^2}. \quad (21)$$

Tornando a x e y si ha

$$x = vt - (v/\omega) \sin \omega t, \quad y = (v/\omega) \cos \omega t, \dots \quad (22)$$

che descrive una cicloide percorsa con velocità di deriva $v = E/B \ll c$ come deriva dalla condizione $E \ll cB$.

Alternativamente si può ragionare nel moto seguente. Applicando le trasformazioni relativistiche del campo elettromagnetico il campo elettrico è nullo nel sistema S' che si muove con velocità $v = E/B$ rispetto al sistema S del laboratorio

$$E'_y = \gamma(v)(E_y - vB_z) = \gamma(v) \left(E - \frac{E}{B}B \right) = 0, \quad (23)$$

dove adesso la condizione $v < c$ garantisce l'esistenza di un sistema dove $E'_y = 0$. Quindi in S' l'elettrone compie un'orbita circolare con frequenza $\omega = eB/m$ (al primo ordine in v/c si ha $\gamma = 1$ e $B'_z = B_z$) e raggio v/ω (la velocità iniziale dell'elettrone in S' è $-\vec{v}$). Tornando nel sistema S del laboratorio dobbiamo sommare alla velocità in S' la velocità della trasformazione (cambiata di segno), che diviene la velocità di deriva dell'elettrone, come trovato col ragionamento precedente.

b) Nel sistema di riferimento in moto abbiamo un momento di dipolo elettrico con componenti $p_x = -e\rho \sin \omega t$ e $p_y = e\rho \cos \omega t$, con derivate seconde $\ddot{p}_x = e\rho\omega^2 \sin \omega t$ e $\ddot{p}_y = -e\rho\omega^2 \cos \omega t$. Usando la (4) abbiamo così una polarizzazione circolare per la radiazione emessa lungo l'asse z , con campo elettrico

$$E_x = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\rho\omega^2 \sin \omega t_{\text{rit}}}{rc^2} \quad (24)$$

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e\rho\omega^2 \cos \omega t_{\text{rit}}}{rc^2}. \quad (25)$$

dove r è la distanza dal dipolo lungo l'asse z . La radiazione emessa lungo gli assi x e y è invece polarizzata linearmente. La potenza totale irraggiata è data dalla (5) e vale

$$P_{\text{irr}} = \frac{e^2 \rho^2 \omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} e^2 \frac{m^2 E^2}{e^2 B^4} \frac{e^4 B^4}{m^4} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0 c^3} \frac{e^4 E^2}{m^2} \quad (26)$$

c) Qualitativamente, nel sistema S' l'elettrone irraggia essendo sottoposto ad un'accelerazione costante. La perdita di energia per irraggiamento va a spese dell'energia cinetica che in S' è associata esclusivamente al moto circolare uniforme. Quindi per $t = \infty$ l'elettrone è fermo in S' , ovvero si muove di moto uniforme con velocità $\vec{v}$ nel laboratorio.

La perdita di energia per irraggiamento può essere descritta quantitativamente. Poiché il sistema di riferimento che viaggia a velocità $v = E/B$ è inerziale, conviene utilizzarlo per svolgere i calcoli. In esso l'elettrone ha un'energia cinetica iniziale $K_0 = \frac{1}{2}m\rho^2\omega^2 = \frac{1}{2}mE^2/B^2$. L'energia irraggiata viene sottratta da questa energia cinetica. Nella (26) dobbiamo tener presente che $\omega = eB/m$ rimane costante, mentre alla perdita di energia cinetica dovuta all'irraggiamento corrisponde una diminuzione progressiva del raggio dell'orbita ρ . Abbiamo quindi

$$\frac{dK}{dt} = m\omega^2\rho \frac{d\rho}{dt} = -\frac{e^2\rho^2\omega^4}{6\pi\epsilon_0 c^3}, \quad (27)$$

che, separando le variabili, diventa

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{e^2\omega^2}{6\pi\epsilon_0 mc^3} dt = -\frac{dt}{\tau} \quad \text{con} \quad \tau = \frac{6\pi\epsilon_0 mc^3}{e^2\omega^2}. \quad (28)$$

Il raggio dell'orbita decresce così esponenzialmente nel tempo secondo la legge

$$\rho(t) = \frac{mE}{eB^2} e^{-t/\tau}. \quad (29)$$

d) Lo spostamento della frequenza emessa da una sorgente in moto deriva dalla natura quadritoriale di $(\omega, \vec{k})$ dove $\vec{k}$ è il vettore d'onda e si ha $\vec{k} = (\omega/c)\hat{n}$, con $\hat{n}$ direzione di emissione. Le trasformazioni di Lorentz dal sistema S' ad S danno

$$\omega_S = \gamma(v)(\omega'_S + \vec{k} \cdot \vec{v}) \simeq \omega(1 + \hat{n} \cdot \vec{v}/c) = \omega(1 + \beta \cos \theta), \quad (30)$$

dove θ è l'angolo di osservazione rispetto alla velocità di deriva $\vec{v}$. In particolare nella direzione lungo il moto si ha $\omega_S = \omega(1 + \beta)$ e nella direzione opposta $\omega_S = \omega(1 - \beta)$.