

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (07/01/2014)

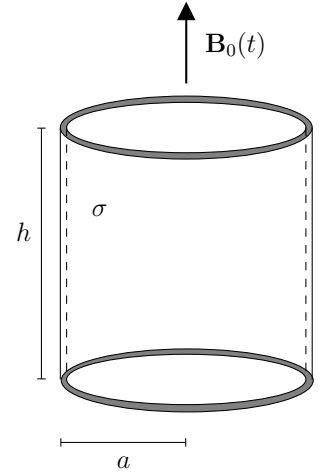
1

Una lamina metallica cilindrica ha conducibilità σ , raggio a , spessore $d \ll a$ e altezza $h \gg a$. La lamina è immersa in un campo magnetico esterno $\mathbf{B}_0$ spazialmente uniforme, parallelo all'asse del cilindro e dipendente dal tempo secondo la legge $\mathbf{B}_0(t) = B_0 e^{-t/\tau} \hat{\mathbf{z}}$ (per $t > 0$). Si assume che i campi siano lentamente variabili, che il sistema abbia simmetria cilindrica rispetto all'asse e che gli effetti di bordo siano trascurabili.

a) Trascurando effetti di autoinduzione, calcolare il campo elettrico indotto $\mathbf{E}(r, t)$ e la corrente $\mathbf{J}$ nella lamina.

b) Si calcoli il campo magnetico $\mathbf{B}_1(t)$ generato da $\mathbf{J}$ e si dica per quali valori di τ gli effetti di autoinduzione sono trascurabili.

c) Si risponda nuovamente alla domanda a) tenendo conto dell'autoinduzione della lamina, ovvero dell'effetto autoconsistente di induzione dovuto al campo $\mathbf{B}_1(t)$.



2

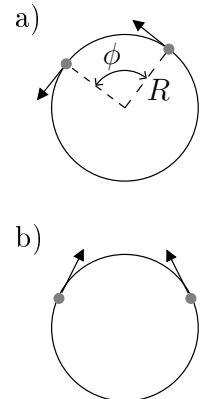
Due elettroni ruotano con stessa velocità angolare costante ω lungo una circonferenza di raggio R .

a) Si assuma che i due elettroni ruotino nello stesso verso con separazione angolare costante ϕ . Calcolare il momento di dipolo elettrico del sistema e discuterne l'irraggiamento, specificando i) la polarizzazione della radiazione emessa nelle direzioni parallela e perpendicolare al piano, ii) la dipendenza della potenza irraggiata (in media sul periodo) dalla condizione iniziale ϕ .

b) Si assuma adesso che i due elettroni ruotino ancora con velocità angolare uguale in modulo ma in verso *opposto* l'uno all'altro e si risponda nuovamente alle domande i) e ii) del punto a).

c) Si considerino ora *tre* elettroni ruotanti con stessa velocità angolare e nello stesso verso. Per quali condizioni la potenza irraggiata è nulla? Generalizzare a N elettroni.

d) Per ognuno dei casi a)-c) spiegare se il termine di dipolo magnetico del sistema contribuisce all'irraggiamento.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Legge di Ohm (ρ resistività, σ conducibilità)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E}/\rho . \quad (2)$$

Campi di radiazione di dipolo elettrico e dipolo magnetico

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} , \quad \mathbf{E}_m = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^3} . \quad (3)$$

dove $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ è la direzione di emissione.

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (4)$$

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria $\mathbf{E}$ è solo azimutale e ha solo linee di forza circolari. Calcolando la circuitazione di $\mathbf{E}$ su queste ultime otteniamo dalla legge di Faraday-Neumann

$$2\pi r E = -\pi r^2 \partial_t B_0(t), \quad E = E(r, t) = \frac{r B_0}{2\tau} e^{-t/\tau}. \quad (5)$$

All'interno del metallo si ha $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$.

b) Poiché la lamina è sottile possiamo trascurare la variazione di $\mathbf{E}$ e di $\mathbf{J}$ al suo interno. Quindi abbiamo una corrente superficiale $\iota = Jd = \sigma E(a, t)d$ che produce un campo magnetico equivalente a quello di un solenoide con $\iota = nI$:

$$B_1 = B_1(t) = \mu_0 \iota = \mu_0 Jd = \mu_0 \sigma E(a, t)d = \frac{\mu_0 \sigma a d B_0}{2\tau} e^{-t/\tau}. \quad (6)$$

L'autoinduzione è trascurabile se $B_1 \ll B_0$ ovvero se $\tau \gg \mu_0 \sigma a d / 2 = (\sigma / \varepsilon_0)(2ad/c^2)$.

c) Appliciamo nuovamente la legge di Faraday-Neumann tenendo conto di $B_1 = \mu_0 \sigma E(a, t)d$:

$$2\pi a E(a, t) = -\pi a^2 \partial_t [B_0(t) + B_1(t)] = \pi a^2 \left[\frac{B_0}{\tau} e^{-t/\tau} - \mu_0 \sigma d \partial_t E(a, t) \right]. \quad (7)$$

Facendo l'ipotesi che continui ad essere $E(r, t) = E_0(r) e^{-t/\tau}$ otteniamo

$$2\pi a E_0(a) = \pi a^2 \frac{B_0}{\tau} + \pi a^2 \frac{\mu_0 \sigma d}{\tau} E_0(a), \quad (8)$$

da cui si ricava

$$E_0(a) = \frac{a B_0 / 2\tau}{1 - \mu_0 \sigma a d / 2\tau} = \frac{a B_0 / 2\tau}{1 - \sigma a d / 2\varepsilon_0 c^2 \tau}. \quad (9)$$

2

a) Sia xy il piano in cui orbitano gli elettroni. La legge oraria si può scrivere in coordinate cartesiane

$$\begin{aligned} x_1(t) &= R \cos(\omega t - \phi/2), & y_1(t) &= R \sin(\omega t - \phi/2), \\ x_2(t) &= R \cos(\omega t + \phi/2), & y_2(t) &= R \sin(\omega t + \phi/2). \end{aligned} \quad (10)$$

Il momento di dipolo del sistema è $\mathbf{p} = -e(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)$ ovvero, in componenti

$$\begin{aligned} p_x &= -eR[\cos(\omega t - \phi/2) + \cos(\omega t + \phi/2)] = -2eR \cos(\phi/2) \cos \omega t, \\ p_y &= -eR[\sin(\omega t - \phi/2) + \sin(\omega t + \phi/2)] = -2eR \cos(\phi/2) \sin \omega t, \end{aligned} \quad (11)$$

da cui è evidente che il dipolo totale ruota nel piano con frequenza ω e ha modulo $p = 2eR \cos(\phi/2)$.

Per irraggiamento di dipolo elettrico la polarizzazione (ovvero la direzione del campo $\mathbf{E}$) in direzione $\hat{\mathbf{n}}$ è data dalla proiezione del dipolo sulla perpendicolare a $\hat{\mathbf{n}}$

$$(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{p}_\perp. \quad (12)$$

Poiché

$$(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{x}}) \times \hat{\mathbf{x}} \sim \hat{\mathbf{y}} p \sin \omega t, \quad (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{y}} \sim \hat{\mathbf{x}} p \cos \omega t \quad (13)$$

la polarizzazione lungo $\hat{\mathbf{x}}$ ($\hat{\mathbf{y}}$) è lineare e diretta lungo $\hat{\mathbf{y}}$ ($\hat{\mathbf{x}}$). Lungo $\hat{\mathbf{z}}$ si ha

$$(\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{z}}) \times \hat{\mathbf{z}} \sim p(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t) \quad (14)$$

ovvero una polarizzazione circolare.

L'espressione della potenza totale irradiata è, a meno di costanti

$$P \sim |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = 4e^2 R^2 \omega^4 \cos^2(\phi/2), \quad (15)$$

ed è nulla quando $\mathbf{p} = 0$, cioè per $\phi = \pi$ (elettroni in posizioni diametralmente opposte) e massima per $\phi = 0$ (elettroni sovrapposti).

c) Gli elettroni si incontrano durante il loro moto e si può assumere che questo avvenga in $\theta = 0$ per $t = 0$. La legge oraria si può scrivere

$$x_1(t) = R \cos \omega t, \quad y_1(t) = R \sin \omega t, \quad x_2(t) = R \cos \omega t, \quad y_2(t) = -R \sin \omega t. \quad (16)$$

Il dipolo totale è orientato in direzione $\hat{\mathbf{x}}$ ed è dato da $\mathbf{p} = -2eR\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t$. Quindi *non* si ha emissione di radiazione nella direzione parallela a $\mathbf{p}$, mentre la radiazione emessa nelle direzioni perpendicolari è polarizzata linearmente. La potenza irradiata è, a meno di costanti

$$P \sim 4e^2 R^2 \omega^4 \cos^2 \omega t. \quad (17)$$

c) Il momento di dipolo è nullo per una configurazione simmetrica con i tre elettroni che ruotano disposti sui vertici di un triangolo equilatero. Generalizzando si ha che il momento di dipolo per N elettroni è nullo per configurazioni simmetriche, ovvero con gli elettroni disposti ai vertici di un poligono regolare con N lati.

d) Il momento di dipolo magnetico $\mathbf{m} = eR^2\boldsymbol{\omega}$ è costante per un elettrone rotante a velocità costante. Questo termine non contribuisce all'irraggiamento in nessun caso, in quanto i campi di dipolo magnetico sono proporzionali a $\dot{\mathbf{m}}$.