

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (14/01/2015)

1

Una lastra conduttrice piana è appoggiata sulla superficie di un materiale, con permittività dielettrica relativa $\varepsilon_r > 1$ assegnata, che riempie il semispazio $z < 0$. L'area della superficie di contatto è S e lo spessore della lastra è $h \ll \sqrt{S}$. La lastra possiede la carica libera totale Q . Gli effetti di bordo sono assunti trascurabili.



Calcolare

- a) le densità superficiali di carica libera sulle superfici superiore (σ_1) e inferiore (σ_2) della lastra, la densità di carica di polarizzazione alla superficie del dielettrico (σ_p) e il campo elettrico in tutto lo spazio, specificandone direzione e verso;
- b) la forza agente sulla lastra, specificandone direzione e verso.

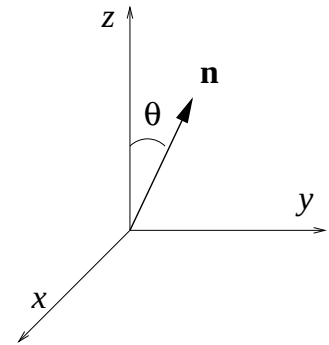
2

Un protone di carica e e massa m si muove con velocità iniziale $\mathbf{V}$, con $V \ll c$, della quale non sono inizialmente note direzione e verso, in una regione di spazio in cui è presente un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}$, del quale non sono inizialmente note intensità, direzione e verso.

- a) Si descriva in generale il moto del protone in presenza del campo magnetico.

Si osserva sperimentalmente che la radiazione emessa dal protone dipende dalla direzione di osservazione $\hat{\mathbf{n}}$ secondo una legge del tipo $\omega(\theta) = \omega_0(1 + \alpha \cos \theta)$ (con $\alpha \ll 1$), dove θ è l'angolo fra $\hat{\mathbf{n}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$.

- b) Che informazioni sulla direzione e intensità di $\mathbf{B}$ e sulla velocità $\mathbf{V}$ del protone si ricavano dalla misura di ω_0 e α ?
- c) Che tipo di polarizzazione della radiazione emessa si osserva lungo gli assi $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$? Che informazioni se ne ricavano sul verso di $\mathbf{B}$?
- d) Che informazioni si ricavano sulla velocità del protone dalla misura della potenza totale irradiata in media su un periodo?



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (1)$$

Relazione tra densità di polarizzazione $\mathbf{P}$ e densità di carica di polarizzazione ρ_{pol} e σ_{pol} , di superficie e di volume, rispettivamente

$$\nabla \cdot \mathbf{P} = -\rho_{\text{pol}} , \quad \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_{\text{pol}} , \quad (2)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ il versore ortogonale alla superficie del dielettrico, diretto verso l'esterno.

Equazioni dell'elettrostatica per mezzi con permittività dielettrica ε :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_{\text{lib}} + \rho_{\text{pol}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \mathbf{D} \equiv (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) \equiv \varepsilon \mathbf{E} , \quad (3)$$

dove ρ_{lib} è la densità di carica libera di volume.

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r c^2} \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) Poiché all'interno della lastra conduttrice deve essere $\mathbf{E} = 0$, le densità *totali* di carica superficiale alle due superfici della lastra devono essere uguali. Dette σ_1 e σ_2 le densità di carica *libera* sulle facce superiore ed inferiore, rispettivamente, e σ_p la densità di carica *di polarizzazione* alla superficie di contatto, e trascurando gli effetti di bordo, valgono le seguenti relazioni

$$\sigma_1 + \sigma_2 = Q/S, \quad \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_p. \quad (6)$$

Nel dielettrico il campo è $\mathbf{E}_d = -\hat{\mathbf{z}}(\sigma_2 + \sigma_p)/\varepsilon_0$ e quindi la densità di polarizzazione è $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_d$ con $\chi = \varepsilon_r - 1$. Poiché $\mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \sigma_p$ otteniamo l'ulteriore relazione, valida alla superficie del dielettrico

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \hat{\mathbf{z}} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_d \cdot \hat{\mathbf{z}} = -P = -(\sigma_2 + \sigma_p)\chi, \quad (7)$$

da cui otteniamo, risolvendo in σ_p

$$\sigma_p = -\chi\sigma_2/(1 + \chi) = -\chi\sigma_2/\varepsilon_r. \quad (8)$$

Alla stessa relazione si arriva notando che nel dielettrico $D = \sigma_2$ ed essendo $E = D/(\varepsilon_0\varepsilon_r)$ si ottiene $\sigma_p = -P = -\varepsilon_0\chi E = -\chi\sigma_2/\varepsilon_r$. Dalle relazioni (6) e (8) si ottengono le tre densità di carica richieste

$$\sigma_1 = \frac{1}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S}, \quad \sigma_2 = \frac{\varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S} = \varepsilon_r\sigma_1, \quad \sigma_p = \frac{1 - \varepsilon_r}{1 + \varepsilon_r} \frac{Q}{S} = (1 - \varepsilon_r)\sigma_1, \quad (9)$$

Come procedimento alternativo si può richiamare il problema della carica immagine di fronte ad un semispazio dielettrico; in questo modo si ottiene che i campi generati nella regione di vuoto sopra la lastra ($z > h$) sono quelli generati da due piani carichi, “infiniti” nelle approssimazioni date, con densità superficiali σ_1 e σ_2 , più due piani “immagine” in posizione simmetrica rispetto alla superficie di separazione ($z = 0$) con densità, rispettivamente

$$\sigma'_1 = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\sigma_1, \quad \sigma'_2 = -\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1}\sigma_2. \quad (10)$$

Il campo totale generato nel conduttore, che deve essere nullo, è dato da

$$E_{\text{cond}} = (-\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma'_1 + \sigma'_2)/\varepsilon_0 \doteq 0 \quad (11)$$

da cui si ricava $\sigma_1 = \sigma_2/\varepsilon_r$ e di qui usando la prima delle (6) si torna al risultato precedente.

I campi elettrici al di sopra e al di sotto della lastra si possono determinare facendo uso di superfici di Gauss cilindriche, con asse $\hat{\mathbf{z}}$, disposte in modo che una delle basi si trovi all'interno della lastra (dove il campo è nullo) e una al di fuori. Otteniamo così, rispettivamente per $z > h$ e $z < 0$:

$$E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = E_1. \quad (12)$$

Alternativamente, per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico nelle due regioni è dato dalla somma dei contributi dei campi generati da due piani carichi, “infiniti” nelle approssimazioni date,

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} + \frac{\sigma_2 + \sigma_p}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \quad z > h, \quad (13)$$

$$\mathbf{E}_2 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} - \frac{\sigma_2 + \sigma_p}{2\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}\hat{\mathbf{z}} \quad z < 0. \quad (14)$$

I due campi hanno uguale intensità e verso opposto, come ci si aspetta dato che il campo interno al conduttore è nullo.

b) La forza totale è la somma delle pressioni elettrostatiche sulle superficie superiore e inferiore, moltiplicata per l'area delle superfici

$$F = \frac{1}{2}(E_1\sigma_1 - E_2\sigma_2)S = \frac{E_1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)S = \frac{1}{2\varepsilon_0} \left(\sigma_1^2 - \frac{\sigma_2^2}{\varepsilon_r} \right) S = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S} \frac{1 - \varepsilon_r}{(1 + \varepsilon_r)^2} . \quad (15)$$

La forza è diretta lungo $\hat{\mathbf{z}}$ e, poiché $\varepsilon_r > 1$, è attrattiva, ovvero tende a far aderire la lastra conduttrice al dielettrico.

2

a) L'equazione del moto non relativistico del protone è:

$$m_p \frac{d\mathbf{v}}{dt} = +e\mathbf{v} \times \mathbf{B} . \quad (16)$$

Se separiamo la velocità $\mathbf{v}$ del protone in una componente $\mathbf{v}_B = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{B})/B$ parallela al campo magnetico e una componente $\mathbf{v}_\perp = \mathbf{V} - \mathbf{v}_B$, troviamo che in generale la traiettoria del protone è elicoidale, con asse parallelo a $\mathbf{B}$: la componente $\mathbf{v}_B$ si mantiene costante mentre la componente perpendicolare ruota attorno all'asse con la frequenza di ciclotrone $\omega_c = eB/m$.

b) Nel riferimento S_B in cui $v_B = 0$ il moto del protone è circolare uniforme: perciò la radiazione emessa è quella di un dipolo elettrico rotante in un piano perpendicolare alla direzione di $\mathbf{B}$, con frequenza uguale a ω_c . In generale, in ogni altro riferimento in moto a velocità $\mathbf{u}$ rispetto a S_B la frequenza osservata in direzione $\hat{\mathbf{n}}$ subirà lo spostamento Doppler (nel limite $v_B \ll c$)

$$\omega \simeq \omega_c(1 + \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{u}/c) = \omega_c(1 + u \cos \theta/c) . \quad (17)$$

Confrontando la legge osservata sperimentalmente con la (17), deduciamo che nel riferimento del laboratorio $\omega_0 = \omega_c$ e $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, cosicché $\alpha = v_B/c = \hat{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{V}/c$.

c) Per quanto detto in precedenza, per effetto della sua rotazione attorno a $\mathbf{B}$ il protone ha un momento di dipolo che varia nel tempo secondo la legge

$$\mathbf{p} = ea(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_c t \pm \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_c t) , \quad a = v_\perp/\omega_c , \quad (18)$$

ovvero ruota nel piano xy : il segno nell'equazione, e quindi il verso di rotazione, è legato al verso di $\mathbf{B}$. La polarizzazione della luce emessa in direzione $\hat{\mathbf{n}}$ è proporzionale a

$$\mathbf{E} \sim (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{p}) \times \hat{\mathbf{n}} \sim \mathbf{p}_\perp , \quad (19)$$

dove $\mathbf{p}_\perp$ è la componente di $\mathbf{p}$ perpendicolare a $\hat{\mathbf{n}}$. In direzione $\hat{\mathbf{x}}$ o $\hat{\mathbf{y}}$ si osserva quindi una polarizzazione lineare, mentre lungo $\hat{\mathbf{z}}$ si osserva una polarizzazione circolare, dal cui verso (destrorso o sinistrorso) si può risalire al verso di $\mathbf{B}$.

d) Dal momento che per l'equazione (5) la potenza totale irradiata in media su un periodo è

$$\langle P_{\text{irr}} \rangle = \frac{2k_0}{3c^3} \langle |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \rangle = \frac{2k_0}{3c^3} e^2 \omega_c^2 v_\perp^2 . \quad (20)$$

Dal valore noto della potenza possiamo ricavare il modulo della componente $v_\perp$ della velocità e di conseguenza, visto che dal punto **b)** abbiamo la componente parallela al campo magnetico, direzione e verso della velocità.