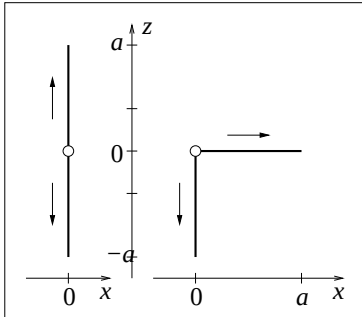


Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (14/01/2016)

1



Un'antenna rettilinea dipolare alimentata al centro di lunghezza $2a$ è schematizzabile come un conduttore cilindrico sottile di resistenza R esteso da $z = -a$ a $z = +a$, lungo il quale scorre la corrente (mantenuta da un opportuno generatore ideale e uniformemente distribuita in direzione trasversa)

$$I = I(z, t) = \text{Re} \left[I_0 \left(1 - \frac{|z|}{a} \right) e^{-i\omega t} \right]. \quad (1)$$

- a) Calcolare il valore medio sul periodo della potenza dissipata per effetto Joule P_{dis} (NB: si tenga conto del fatto che la corrente *non* è uniforme lungo z !).
- b) Calcolare la densità di carica lineare sull'antenna e il momento di dipolo elettrico.
- c) Calcolare il valore medio sul periodo della potenza irradiata P_{irr} e il rapporto $P_{\text{irr}}/P_{\text{dis}}$.
- d) Determinare in quali direzioni angolari la potenza irradiata è nulla.

Si ipotizza adesso di piegare orizzontalmente (lungo l'asse x) la metà superiore dell'antenna, senza perturbare l'intensità di corrente e la densità di carica lungo l'antenna stessa.

- e) Rispondere nuovamente alle domande precedenti per l'antenna piegata, discutendo le differenze rispetto all'antenna rettilinea.

2

Lungo un filo infinito, immerso in un mezzo omogeneo avente permittività dielettrica $\varepsilon_r > 1$ e magnetica $\mu_r > 1$, si trova la densità lineare di carica ℓ e scorre l'intensità di corrente I .

- a) Assumendo ℓ e I uniformi e costanti, determinare i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ in tutto lo spazio.

Si supponga ora che

$$\ell = \ell(z, t) = \ell_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad I = I(z, t) = I_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad (2)$$

dove z è la coordinata lungo il filo.

- b) Si usi l'equazione di continuità per la carica elettrica per determinare una relazione tra ℓ_0 , I_0 e la velocità di fase $v_f = \omega/k$.

c) Assumendo che i campi elettromagnetici siano dati da $\mathbf{E}(r, z, t) = \mathbf{E}(r) e^{ikz - i\omega t}$ e $\mathbf{B}(r, z, t) = \mathbf{B}(r) e^{ikz - i\omega t}$ dove $\mathbf{E}(r)$ e $\mathbf{B}(r)$ sono le soluzioni statiche trovate al punto a) e r è la distanza radiale dal filo, si determini v_f dalle equazioni di Maxwell.

d) (*facoltativo*) Si mostri che in un sistema di riferimento in moto con velocità v_f in direzione z rispetto al sistema del laboratorio i campi e le correnti sono indipendenti dal tempo t' e che inoltre $\mathbf{E}' = 0$ e $I' = 0$, mentre $\ell' \neq 0$ e $\mathbf{B}' \neq 0$. Si dica perché questo risultato appare sorprendente e si provi a darne una spiegazione.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

“Impedenza del vuoto”

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.37 \, \Omega. \quad (4)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε senza cariche libere

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (5)$$

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ senza correnti libere

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (6)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (7)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (8)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_{\parallel} = \gamma(A_{\parallel} - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp}, \quad (9)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_{\parallel} = E_{\parallel}, \quad E'_{\perp} = \gamma(E_{\perp} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_{\parallel} = B_{\parallel}, \quad B'_{\perp} = \gamma(B_{\perp} - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (10)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (11)$$

SOLUZIONI

1

a) Consideriamo l'antenna come una serie di resistenze infinitesime $dR = (R/2a)dz$. La potenza dissipata è allora data da

$$P_{\text{dis}} = \int \langle I^2 \rangle dR = \int_{-a}^{+a} \frac{I_0^2}{2} \left(1 - \frac{|z|}{a}\right)^2 \frac{R}{2a} dz = \frac{I_0^2 R}{6}. \quad (12)$$

b) La densità di carica lineare sull'antenna si ottiene dall'equazione di continuità $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui

$$\ell = \pm \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t}, \quad (13)$$

dove il segno $+$ o $-$ si ha per $z > 0$ o $z < 0$, rispettivamente. La densità di carica è quindi uniforme su ogni metà dell'antenna. Per simmetria, l'unica componente non nulla del momento di dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è lungo z ed è data da

$$p_z = \int_{-a}^{+a} z \ell dz = 2 \int_0^{+a} \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} z dz = \frac{iI_0 a}{\omega} e^{-i\omega t}. \quad (14)$$

c) Il valore totale della potenza irradiata è

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0}{3c^3} (|\ddot{p}_z|^2) = \frac{k_0}{3c^3} (I_0 \omega a)^2 = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (15)$$

Si ha quindi

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{dis}}} = 2\pi \frac{Z_0}{R} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (16)$$

d) La potenza irradiata dall'antenna varia come $\sin^2 \theta$ dove θ è l'angolo rispetto alla direzione del momento di dipolo elettrico. Quindi la potenza è nulla lungo la direzione parallela all'antenna (z) e massima nel piano $z = 0$.

e) L'antenna "piegata" ha densità di carica $(iI_0/a\omega)e^{-i\omega t}$ sul braccio orizzontale e opposta sul braccio verticale. Il momento di dipolo elettrico ha ora due componenti:

$$p_x = \int_0^a \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} x dx = \frac{iI_0 a}{2\omega} e^{-i\omega t}, \quad p_z = - \int_{-a}^0 \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} z dz = \frac{iI_0 a}{2\omega} e^{-i\omega t}. \quad (17)$$

Poiché le componenti sono ortogonali, possiamo calcolare la potenza irradiata (in media sul periodo) come somma delle potenze emesse dai dipoli p_x e p_z :

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0}{3c^3} (|\ddot{p}_x|^2 + |\ddot{p}_z|^2) = \frac{k_0}{6c^3} (I_0 \omega a)^2 \quad (18)$$

Questo valore è la metà della potenza emessa dall'antenna rettilinea. La potenza dissipata è invece la stessa.

Il dipolo elettrico è diretto lungo la diagonale dell'antenna. L'emissione è quindi nulla lungo la diagonale e massima nel piano perpendicolare a tale direzione.

2

a) Il campo $\mathbf{E}$ ha simmetria cilindrica ed è radiale. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio r coassiale al piano si ha $2\pi r E_r(r) = \ell/(\varepsilon_r \varepsilon_0)$, da cui $E_r(r) = \ell/(2\pi \varepsilon_r \varepsilon_0 r)$.

Il campo $\mathbf{B}$ ha simmetria cilindrica ed è solenoidale. Applicando il teorema di Ampère ad una circonferenza di raggio r ortogonale e centrata rispetto al filo, si ha $2\pi r B_\phi(r) = \mu_r \mu_0 I$, da cui $B_\phi(r) = \mu_r \mu_0 I/(2\pi r)$.

b) L'equazione di continuità per la densità lineare di carica si scrive $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui $-i\omega \ell_0 = -ik I_0$ ovvero $I_0 = v_f \ell_0$.

c) L'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ proiettata in direzione $\hat{\phi}$ fornisce $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$ ovvero, nel caso presente, $ik\ell/\varepsilon_r \varepsilon_0 = i\omega \mu_r \mu_0 I_0$. Usando il risultato del punto b) e $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$ si ottiene $v_f = c/\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$. Inoltre $|E_r|/|B_\phi| = v_f$.

d) Sia $\gamma = (1 - v_f^2/c^2)^{-1/2}$. Si ha

$$\omega' = \gamma(\omega - v_f k) = 0, \quad k' = \gamma(k - v_f \omega/c^2) = k/\gamma. \quad (19)$$

Poiché $kz - \omega t = k'z' - \omega't'$, in S' la dipendenza spazio-temporale dei campi è data dal fattore $e^{ik'z'}$, ovvero i campi sono *statici* in S' .

Per le sorgenti dei campi

$$I'_0 = \gamma(I_0 - v_f \ell_0) = 0, \quad \ell'_0 = \gamma(\ell_0 - v_f I_0/c^2) = \ell_0/\gamma. \quad (20)$$

Infine per le ampiezze dei campi

$$B'_\phi = \gamma(B_\phi - v_f E_r/c^2) = B_\phi/\gamma, \quad E'_r = \gamma(E_r - v_f B_\phi) = 0. \quad (21)$$

Quindi in S' si ha una densità di carica libera $\ell' \neq 0$ mentre l'intensità di corrente $I' = 0$, il che appare sorprendente dato che $\mathbf{E}' = 0$ mentre $\mathbf{B}' \neq 0$.

La ragione è che dobbiamo anche considerare come si trasforma la densità di carica di polarizzazione presente all'interfaccia tra conduttore e dielettrico (nel seguito non consideriamo gli effetti della magnetizzazione, ovvero per semplicità poniamo $\mu_r = 1$). Nel sistema S del laboratorio, infatti, la carica di polarizzazione sulla superficie di contatto col filo conduttore ha una densità lineare

$$\ell_P = \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \ell, \quad (22)$$

in quanto la densità totale di carica risulta $\ell + \ell_P = \ell/\varepsilon_r$. Nel sistema S' le cariche di polarizzazione hanno una velocità di trascinamento $c\beta$ che dà origine ad una corrente I'_P lungo z' . Dalle trasformazioni di Lorentz otteniamo

$$\ell'_P = \gamma \ell_P = \gamma \left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \ell = -\ell/\gamma, \quad I'_P = -\gamma \beta c \ell_P = -\gamma v_f \ell_P, \quad (23)$$

essendo $(\varepsilon_r^{-1} - 1) = (v_f^2/c^2 - 1) = -\gamma^{-2}$. Otteniamo quindi che la densità lineare della carica *totale* è nulla

$$\ell'_{tot} = \ell' + \ell'_P = \ell/\gamma - \ell/\gamma = 0, \quad (24)$$

il che giustifica $E'_r = 0$. La corrente $I'_{tot} = I' + I'_P = I'_P$ genera invece il campo magnetico:

$$B'_\phi = \frac{\mu_0 I'_P}{2\pi r} = \frac{B_\phi}{\gamma}, \quad (25)$$

essendo

$$I'_P = -\gamma v_f \ell_P = -\gamma v_f \left(-\frac{\ell}{\gamma^2} \right) = v_f \frac{\ell}{\gamma} = \frac{I}{\gamma}. \quad (26)$$

Notare che la corrente di polarizzazione è radiale ($\mathbf{J}_P = \partial_t \mathbf{P}$ con $\mathbf{P} = \chi \mathbf{E}$), a differenza della corrente longitudinale lungo il filo, e da questo deriva l'espressione diversa della trasformazione di Lorentz per I_p rispetto ad I .