

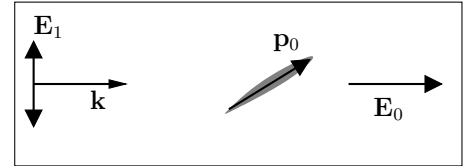
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (16/01/2017)

1

Una molecola lineare polare può essere modellizzata come un rotatore unidimensionale rigido di lunghezza d , avente un momento di dipolo elettrico permanente $\mathbf{p}_0$ e un momento di inerzia $\mathcal{I}$ (si considerano rotazioni in un piano contenente l'asse della molecola).



La molecola è posta in un campo elettrico $\mathbf{E}_0$, uniforme e costante.

- a) Trovare le posizioni di equilibrio della molecola e la frequenza delle piccole oscillazioni.
- b) Caratterizzare la radiazione associata alle piccole oscillazioni, dandone la frequenza, la polarizzazione per emissione rispettivamente in direzione parallela a $\mathbf{E}_0$ o nel piano ad esso perpendicolare, e la potenza media irradiata per ciclo.
- c) Stimare il tempo di smorzamento delle oscillazioni dovuto all'irraggiamento.

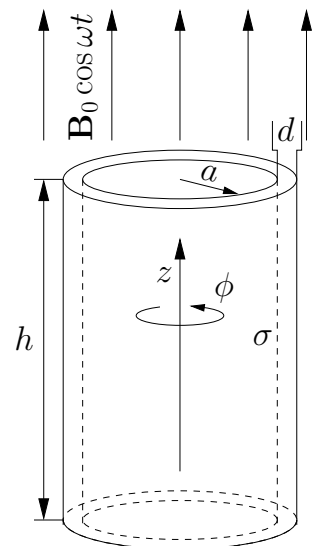
Si consideri ora la molecola in presenza di $\mathbf{E}_0$ e del campo di un'onda monocromatica di frequenza ω (tale che $c/\omega \gg d$), linearmente polarizzata con ampiezza del campo elettrico $\mathbf{E}_1$, e propagantesi nella direzione parallela a $\mathbf{E}_0$. Calcolare

- d) l'ampiezza delle oscillazioni forzate della molecola (in condizioni di regime),
- e) la potenza diffusa dalla molecola.

2

Una lamina cilindrica metallica con conducibilità σ ha raggio a , spessore $d \ll a$ e lunghezza $h \gg a$. La lamina viene posta in un campo magnetico oscillante $\mathbf{B}_0 \cos \omega t$ parallelo all'asse della lamina. Assumendo simmetria cilindrica rispetto all'asse della lamina e opportune ulteriori approssimazioni (da giustificare anche a posteriori), calcolare

- a) il campo elettrico e la densità di corrente all'interno del metallo,
- b) il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ indotto dalla densità di corrente all'interno della lamina.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Equazione del moto di un rotatore avente momento di inerzia $\mathcal{I}$ sottoposto ad un momento torcente $\boldsymbol{\tau}$:

$$\mathcal{I} \frac{d^2 \boldsymbol{\theta}}{dt^2} = \boldsymbol{\tau} . \quad (2)$$

Campo in un solenoide infinito orientato lungo l'asse z , avente n spire per unità di lunghezza nelle quali scorre l'intensità di corrente I

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} . \quad (3)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} e^{-i\omega t_{\text{rit}}} \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 , \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) La forza netta sulla molecola è nulla, quindi il centro di massa può essere assunto immobile. Il campo $\mathbf{E}_0$ esercita un momento torcente $\boldsymbol{\tau}_0 = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}_0$, facendo ruotare la molecola nel piano che contiene sia $\mathbf{p}_0$ che $\mathbf{E}_0$. L'equazione del moto è $\mathcal{I}\ddot{\theta} = \tau_0$, ovvero

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -p_0 E_0 \sin \theta , \quad (6)$$

dove $\theta = \theta(t)$ è l'angolo tra $\mathbf{p}_0$ ed $\mathbf{E}_0$. I punti di equilibrio sono $\theta = 0$ (stabile) e $\theta = \pi$ (instabile). Per piccole oscillazioni attorno a $\theta = 0$ possiamo porre $\sin \theta \simeq \theta$ e ottenere

$$\ddot{\theta} \simeq -\frac{p_0 E_0}{\mathcal{I}} \theta \equiv -\omega_0^2 \theta , \quad \omega_0^2 = \frac{E_0 p_0}{\mathcal{I}} . \quad (7)$$

Per un piccolo spostamento di ampiezza massima θ_0 , otteniamo $\theta(t) \simeq \theta_0 \cos \omega_0 t$.

b) Il momento di dipolo elettrico ha componenti (assumendo $\mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{x}}$)

$$p_x = p_0 \cos \theta \simeq p_0 , \quad p_y = p_0 \sin \theta \simeq p_0 \theta , \quad (8)$$

quindi per piccole oscillazioni la molecola emette come un dipolo elettrico oscillante di frequenza ω e parallelo a $\hat{\mathbf{y}}$. La radiazione è linearmente polarizzata e con una distribuzione angolare $\sim \sin^2 \alpha$ con α l'angolo di osservazione rispetto a $\hat{\mathbf{y}}$; cioè la potenza irradiata per angolo solido ha il proprio massimo nel piano xz ed è nulla nella direzione $\hat{\mathbf{y}}$. La potenza irradiata in media sul periodo è

$$P_r = \frac{1}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{1}{3c^3} \omega_0^4 p_0^2 \theta_0^2 . \quad (9)$$

c) Per descrivere lo smorzamento delle oscillazioni assumiamo che il tempo di smorzamento sia molto più grande del periodo di oscillazione. Possiamo allora scrivere $\theta(t) \simeq \theta_s(t) \cos \omega_0 t$ con $\theta_s(t)$ circa costante durante un'oscillazione. L'energia totale della molecola per le piccole oscillazioni è

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= K + U = \frac{1}{2} \mathcal{I} \dot{\theta}^2 - p_0 E_0 (\cos \theta - 1) \simeq \frac{1}{2} \mathcal{I} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} p_0 E_0 \theta^2 = \frac{1}{2} \mathcal{I} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega_0^2 \theta^2 , \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{I} \theta_s^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega_0^2 \theta_s^2 \cos^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} \mathcal{I} \omega_0^2 \theta_s^2 \end{aligned} \quad (10)$$

La perdita di energia dovuta all'irraggiamento può essere descritta dall'equazione

$$\frac{d\bar{\mathcal{E}}}{dt} = \omega_0^2 \mathcal{I} \theta_s \frac{d\theta_s}{dt} = -P_r(\theta_s) = -\frac{1}{3c^3} \omega_0^4 p_0^2 \theta_s^2 , \quad (11)$$

da cui otteniamo

$$\frac{d\theta_s}{dt} = -\frac{1}{3c^3} \frac{\omega_0^2 p_0^2}{\mathcal{I}} \theta_s . \quad (12)$$

L'ampiezza di oscillazione quindi decade esponenzialmente:

$$\theta_s(t) = \theta_0 e^{-t/\tau} , \quad \tau = \frac{3\mathcal{I}c^3}{\omega_0^2 p_0^2} . \quad (13)$$

d) Dato che $kd \ll 1$ il campo dell'onda può essere considerato come uniforme sulla molecola; in notazione complessa possiamo scrivere $\mathbf{E}_1(x, t) \simeq \mathbf{E}_1 e^{-i\omega t}$. Il momento torcente esercitato dall'onda è $\tau_1 = \mathbf{p}_0 \times \mathbf{E}_1$. L'equazione del moto è quindi

$$\mathcal{I}\ddot{\theta} = -p_0 E_0 \sin \theta - p_0 E_1 \cos \theta e^{-i\omega t} , \quad (14)$$

che per piccole oscillazioni ($\sin \theta \simeq \theta$, $\cos \theta \simeq 1$) diventa

$$\ddot{\theta} = -\omega_0^2 \theta - \omega_1^2 e^{-i\omega t} , \quad \omega_1^2 = \frac{E_1 p_0}{\mathcal{I}} = \omega_0^2 \frac{E_1}{E_0} . \quad (15)$$

La soluzione generale è la somma della soluzione omogenea ottenuta al punto **a)**, che descrive oscillazioni libere, e della soluzione particolare $\theta(t) = \theta_f e^{-i\omega t}$ che descrive oscillazioni forzate con ampiezza

$$\theta_f = \frac{\omega_1^2}{\omega^2 - \omega_0^2} . \quad (16)$$

Notare che per semplicità non abbiamo incluso alcun termine d'attrito nell'Eq.(7), ma *a posteriori* è chiaro che un qualche termine d'attrito (quale ad esempio $-\dot{\theta}/\tau$) dovrebbe essere comunque presente per poter descrivere la perdita di energia per irraggiamento. Tuttavia, da che $\tau^{-1} \ll \omega_0$, nella soluzione il termine di attrito sarebbe importante solo vicino alla risonanza $\omega = \omega_0$.

e) In condizioni stazionarie (ovvero dopo una fase transiente di durata $\sim \tau$ durante la quale le oscillazioni alla frequenza ω_0 si smorzano) la molecola vibra alla frequenza ω . Nella stessa assunzione di piccole oscillazioni fatta al punto **b)**, c'è una componente oscillante del dipolo elettrico $p_y \simeq p_0 \theta_f e^{-i\omega t}$. La corrispondente potenza irradiata, ovvero la potenza diffusa, mediata sul periodo è

$$P_s = \frac{1}{3c^3} |\ddot{p}_y|^2 = \frac{p_0^2}{3c^3} \frac{\omega^4 \omega_1^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} = \frac{p_0^4 E_1^2}{3\mathcal{I}^2 c^3} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} . \quad (17)$$

L'intensità dell'onda incidente è $I = (c/4\pi) E_1^2$, quindi la sezione d'urto di diffusione è

$$\sigma_s = \frac{P_s}{I} = \frac{4\pi p_0^4}{3\mathcal{I}^2 c^4} \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2} . \quad (18)$$

Una stima di ordine di grandezza per una molecola semplice come HI o HCl può essere fatta notando che $p_0 \sim ed$ e $\mathcal{I} \sim md$, con $m \sim m_p$ la massa dei nuclei, per cui $(p_0^4/\mathcal{I}^2 c^4) \sim (e^2/m_p c^2)^2$.

2

a) Usiamo un sistema di coordinate cilindriche (r, ϕ, z) con l'asse z coincidente con l'asse della lamina cilindrica. Consideriamo una circonferenza di raggio a coassiale con la lamina cilindrica, lontana dai bordi. Il flusso del campo magnetico attraverso la circonferenza vale

$$\Phi = \pi a^2 B_0 \cos \omega t . \quad (19)$$

Dall'equazione di Maxwell $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$ segue che la circuitazione del campo elettrico sulla circonferenza vale

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \pi a^2 B_0 \omega \sin \omega t . \quad (20)$$

Data la simmetria del problema, sulla circonferenza abbiamo un campo elettrico azimutale $\mathbf{E} = \hat{\phi} E_\phi$, con

$$E_\phi = \frac{1}{2\pi a} \oint \mathbf{E} \cdot d\ell = \frac{B_0 a \omega}{2} \sin \omega t . \quad (21)$$

Questo, entro le nostre approssimazioni, è il campo all'interno della lamina. Quindi anche la densità di corrente nella lamina sarà azimutale, $\mathbf{J} = \hat{\phi} J_\phi$, con

$$J_\phi = \sigma E_\phi = \sigma \frac{B_0 a \omega}{2} \sin \omega t . \quad (22)$$

b) Alla densità volumica di corrente $\mathbf{J}$ all'interno della lamina, calcolata al punto precedente, corrisponde una densità superficiale di corrente $\mathbf{K} = \hat{\phi} K$, con $K = Jd$. Quindi la nostra lamina cilindrica è equivalente a un solenoide di raggio a e altezza h in cui il prodotto nI (dove n è il numero di spire per unità di lunghezza) vale K . Il solenoide genera quindi al suo interno un campo $\mathbf{B}_1 = \hat{z} B_1$ con

$$B_1 = \mu_0 K = -\mu_0 \sigma \frac{B_0 a d \omega}{2} \sin \omega t . \quad (23)$$

Ovviamente anche il campo $\mathbf{B}_1$ contribuisce al flusso attraverso la circonferenza considerata al punto **a)**, quindi quanto ottenuto fin qui è una buona approssimazione della situazione reale solo se l'ampiezza di $\mathbf{B}_1$ è molto minore dell'ampiezza di $\mathbf{B}_0$. Abbiamo quindi la condizione

$$\mu_0 \sigma \frac{B_0 a d \omega}{2} \ll B_0 \quad \Rightarrow \quad \omega \ll \frac{2}{\mu_0 \sigma a d} . \quad (24)$$