

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016-2017

Compito di Fisica 2 (19/01/2018)

1

Si consideri una lamina cilindrica di raggio a , spessore $\delta \ll a$ e altezza $h \gg a$, costituita da un materiale conduttore Ohmico di conducibilità σ . La lamina è inserita in un solenoide coassiale avente raggio $b > a$ e n spire per unità di lunghezza. Gli effetti di bordo sono trascurabili. Per $t > 0$ un generatore ideale mantiene la corrente $I(t) = I_0 t / \tau$ nel solenoide.

a) Calcolare il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(r, t)$ indotto nel solenoide, la densità di corrente superficiale $\mathbf{K} = \mathbf{K}(t) = \mathbf{J}(t)\delta$ indotta nella lamina e il campo magnetico $\mathbf{B}_L = \mathbf{B}_L(r, t)$ generato da tale corrente, ma trascurando gli effetti di induzione dovuti a $\mathbf{B}_L$.

b) Nelle stesse approssimazioni del punto **a)**, calcolare la potenza dissipata nella lamina e la potenza impiegata dal generatore di corrente esterno (a tal fine si assuma che il solenoide abbia resistenza R).

c) Si risponda alle stesse domande del punto **a)** ma *non* trascurando gli effetti di induzione dovuti al campo $\mathbf{B}_L$. Si discuta in particolare se e come cambia la dipendenza temporale delle varie quantità.

2

Si consideri un elettrone legato a un nucleo atomico e descritto dall'equazione classica del moto

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nu \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \omega_0^2 \mathbf{r}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t), \quad (1)$$

dove per semplicità si trascura il termine di forza magnetica, e si ha $\nu \ll \omega_0$. Sull'elettrone incide un'onda elettromagnetica monocromatica piana di frequenza ω ($\gg \nu$) il cui campo elettrico ha la forma

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_0 e^{ikx - i\omega t}), \quad \mathbf{E}_0 = E_0 \hat{\mathbf{y}}. \quad (2)$$

a) Determinare la dipendenza della potenza diffusa (mediata sul periodo) dalla frequenza ω specificandone il massimo e discutendo i limiti $\omega \gg \omega_0$ e $\omega \ll \omega_0$ (ma sempre $\omega \gg \nu$). Si diano anche le direzioni in cui non si osserva radiazione diffusa.

Si assuma ora che l'elettrone si muova con velocità $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}}$, parallela alla propagazione dell'onda, nel sistema del laboratorio.

b) Si dica a che frequenza si osserva adesso la massima potenza diffusa, e si dia la frequenza della radiazione emessa nelle direzioni rispettivamente parallela e antiparallela a $\mathbf{V}$. Si dica anche in che direzione non si osserva radiazione diffusa (nb: le risposte sono riferite al sistema del laboratorio)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4)$$

Campo in un solenoide infinito orientato lungo l'asse z , avente n spire per unità di lunghezza nelle quali scorre l'intensità di corrente I

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}} . \quad (5)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (6)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (7)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (8)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}) , \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) , \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp , \quad (9)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\beta = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x , \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c) , \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c) , \quad (10)$$

$$B'_x = B_x , \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) , \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) . \quad (11)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (12)$$

SOLUZIONI

1

a) Il campo magnetico generato da un solenoide di n spire per unità di lunghezza percorse da una corrente $I(t)$ è

$$\mathbf{B}(t) = \mu_0 n I(t) \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 n I_0 \frac{t}{\tau} \hat{\mathbf{z}} . \quad (13)$$

Considerando la simmetria cilindrica del problema e usando il teorema di Stokes, dall'equazione

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\ell} = -\partial_t \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (14)$$

otteniamo per il campo elettrico generato da $\mathbf{B}(t)$, che è azimutale e dipendente solo dalla distanza r dall'asse di simmetria

$$\mathbf{E}(t) = -\frac{r}{2} \partial_t B \hat{\boldsymbol{\phi}} = -\frac{r}{2} \frac{\mu_0 n I_0}{\tau} \hat{\boldsymbol{\phi}} . \quad (15)$$

Notare che il campo, data la forma di $I(t)$, è indipendente dal tempo. Sulla lamina cilindrica, che ha raggio a , spessore $\delta \ll a$ e conducibilità σ , avremo una densità volumica di corrente

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = -\sigma \frac{a}{2} \frac{\mu_0 n I_0}{\tau} \hat{\boldsymbol{\phi}} , \quad (16)$$

corrispondente a una densità superficiale

$$\mathbf{K} = \delta \mathbf{J} = -\delta \sigma \frac{a}{2} \frac{\mu_0 n I_0}{\tau} \hat{\boldsymbol{\phi}} , \quad (17)$$

data la piccolezza di δ rispetto ad a . La lamina cilindrica percorsa da una densità di corrente $\mathbf{K}$ genera al proprio interno lo stesso campo magnetico di un solenoide con in prodotto nI uguale a K , quindi

$$\mathbf{B}_L = \mu_0 K = -\mu_0 \delta \sigma \frac{a}{2} \frac{\mu_0 n I_0}{\tau} \hat{\mathbf{z}} \quad (18)$$

b) Nelle approssimazioni del punto a), la potenza per unità di volume dissipata nella lamina vale J^2/σ , quindi la potenza dissipata totale è, tenendo presente che al primo ordine il volume della lamina vale $2\pi a h \delta$,

$$P_d = \frac{J^2}{\sigma} 2\pi a h \delta = \frac{\pi \sigma^2 a^3 h \delta \mu_0^2 n^2 I_0^2}{2\tau^2} \quad (19)$$

mentre il generatore esterno, oltre alla potenza dissipata nella lamina e nel solenoide (che è pari a RI^2) deve fornire anche la variazione dell'energia magnetica. Deve quindi fornire una potenza

$$W = P_d + RI^2 + \frac{dU_m}{dt} = P_d + RI^2 + \pi b^2 h \frac{d}{dt} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right) = RI^2 + \frac{\pi \sigma^2 a^3 h \delta \mu_0^2 n^2 I_0^2}{2\tau^2} + \pi b^2 h \frac{2\mu_0^2 n^2 I_0^2 t}{\tau^2} \quad (20)$$

c) Nel guscio cilindrico $a < r < b$ il campo magnetico rimane lo stesso che al punto a), mentre per $r < a$ dobbiamo tener conto del campo magnetico dovuto alla corrente che scorre sulla lamina:

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I(t) + \mu_0 J(t) \delta = \mu_0 n I(t) + \mu_0 \sigma E(a, t) \delta , \quad (21)$$

dove in generale $E(a, t)$ rispetto al caso precedente viene modificato dal contributo all'induzione del campo della lamina. Usando nuovamente il teorema di Stokes otteniamo

$$2\pi a E(a, t) = -\pi a^2 \partial_t B = -\pi a^2 \mu_0 \left[\frac{n I_0}{\tau} + \sigma \partial_t E(a, t) \delta \right] . \quad (22)$$

Si ottiene quindi l'equazione differenziale per $E(a, t)$

$$\partial_t E(a, t) = -\frac{2}{\mu_0 \sigma a \delta} \left[E(a, t) + \frac{\mu_0 a n I_0}{2\tau} \right] , \quad (23)$$

con soluzione

$$E(a, t) = -\frac{\mu_0 a n I_0}{2\tau} \left[1 - \exp \left(\frac{-2t}{\mu_0 \sigma a \delta} \right) \right] . \quad (24)$$

La corrente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}(a, t)$ e il campo B_L hanno quindi la stessa dipendenza temporale (a rigore, la trattazione della fase transiente è corretta nell'approssimazione di correnti lentamente variabili).

2

a) Trascurando la forza magnetica, l'elettrone oscilla lungo $\hat{\mathbf{y}}$ e si può assumere che rimanga nella posizione $x = 0$. Cercando una soluzione in notazione complessa nella forma $\mathbf{r}(t) = \text{Re}(\mathbf{r}_0 e^{-i\omega t})$ otteniamo

$$\mathbf{r}_0 = \frac{e \mathbf{E}_0 / m_e}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\nu\omega} . \quad (25)$$

La potenza totale diffusa, mediata sul periodo, è data dalla formula di Larmor per l'irraggiamento di dipolo

$$P = \left\langle \frac{2}{3c^3} (e\ddot{\mathbf{r}})^2 \right\rangle = \frac{e^2}{3m_e^2 c^3} |E_0|^2 \frac{\omega^4}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \nu^2 \omega^2} . \quad (26)$$

Il massimo di P si ha in risonanza ($\omega = \omega_0$). Nel limite $\omega \gg \omega_0$ si ottiene che P è indipendente dalla frequenza, mentre per $\omega \ll \omega_0$ si ha $P \propto (\omega/\omega_0)^4$.

La distribuzione angolare varia come $\sin^2 \theta$ dove θ è l'angolo tra la direzione di $\ddot{\mathbf{p}}$, ovvero $\hat{\mathbf{y}}$, e la direzione di osservazione. Quindi non si osserva radiazione lungo $\hat{\mathbf{y}}$ (cioè per $\theta = 0$ e π).

b) Nel sistema solidale con l'elettrone (S') l'onda ha una frequenza

$$\omega' = \gamma(\omega - k\beta c) = \gamma(1 - \beta)\omega , \quad (27)$$

essendo $k = \omega/c$ e avendo posto $\beta = V/c$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Quindi la risonanza si sposta con V secondo l'equazione $\omega_0 = \omega'$.

Nel piano xy , ogni angolo di emissione θ' in S' corrisponde a un vettore d'onda $\mathbf{k}' = k'(\cos \theta', \sin \theta', 0)$ con $k' = \omega'/c$. Per le direzioni parallela e antiparallela, $\theta' = \pi/2$ e $-\pi/2$ rispettivamente. La trasformazione dei corrispondenti vettori d'onda nel sistema del laboratorio fornisce

$$\omega_p = \gamma(\omega' + \beta k' c) = \gamma(1 + \beta)\omega' = \omega , \quad k_p = \gamma(k' + \beta\omega'/c) = \gamma(1 + \beta)k' = k , \quad (28)$$

$$\omega_a = \gamma(\omega' + \beta(-k')/c) = \gamma(1 - \beta)\omega' = \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \omega , \quad k_a = \gamma(-k' + \beta\omega'/c) = -\gamma(1 - \beta)k' = -\omega_a/c . \quad (29)$$

La direzione $\theta' = 0$ è individuata da $\mathbf{k}' = k'(0, 1)$. Antitrasformando nel sistema del laboratorio otteniamo

$$k_x = \gamma(k'_x + \beta\omega'/c) = \gamma\beta\omega'/c, \quad k_y = k'_y = \omega'/c, \quad (30)$$

che corrisponde ad un angolo

$$\tan \theta = \frac{k_y}{k_x} = \frac{1}{\gamma\beta}. \quad (31)$$