

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (14/01/2019)

1

a) Due spire circolari conduttrici, di spessore trascurabile e raggi a e $b \ll a$, sono concentriche e con i propri piani inclinati di un angolo θ , come in Fig. 1a) e 1b). Calcolare il coefficiente di mutua induzione M_{ab} .

b) Si sostituisce la spira di raggio b con un corpo puntiforme con momento magnetico permanente $\mathbf{m}$, inclinato di un angolo θ rispetto all'asse della spira di raggio a , come in Fig. 1c). Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso la spira.

c) Il corpo del punto b) viene mantenuto in rotazione con velocità angolare costante ω . L'asse di rotazione è perpendicolare a $\mathbf{m}$ e giace nel piano della spira di raggio a , che ha resistenza R . Calcolare la corrente indotta nella spira e il momento delle forze necessario a mantenere il corpo in rotazione.

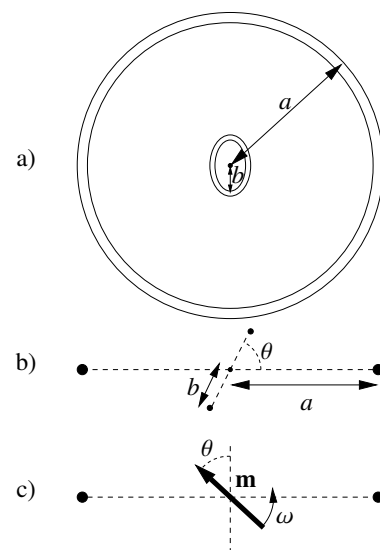


Figura 1

2

Si consideri un elettrone classico legato, descritto dall'equazione del moto

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} + m_e \omega_0^2 \mathbf{r} = -e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) , \quad (1)$$

dove $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ e $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$; termini di smorzamento sono trascurati. Sull'elettrone incide un'onda elettromagnetica monocromatica piana, linearmente polarizzata, il cui campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t) = E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(kx - \omega t) = \text{Re} [E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{i(kx - \omega t)}] , \quad (2)$$

con $k = \omega/c$. Trascurando gli effetti del campo magnetico, la soluzione a regime della (1) è

$$\mathbf{r} = -\frac{e/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(kx - \omega t) , \quad (3)$$

con $x = \text{cost.}$. In questa condizione l'elettrone diffonde radiazione di frequenza ω con distribuzione angolare $\sim \cos^2 \theta$ rispetto all'asse y . Si vogliono ora valutare gli effetti del termine magnetico della forza di Lorentz, assunto non più trascurabile ma "piccolo" rispetto al termine elettrico.

a) Si usi la (3) per valutare il termine magnetico nella (1) e si dica come il moto dell'elettrone viene modificato, anche in funzione della frequenza ω .

b) Si dica come viene modificata la radiazione diffusa, specificando se compaiono altre frequenze e determinandone la distribuzione angolare.

c) Nel caso di un'onda con polarizzazione circolare, il cui campo elettrico può essere scritto

$$\mathbf{E} = \text{Re} [E_0(\hat{\mathbf{y}} + i\hat{\mathbf{z}})e^{i(kx - \omega t)}] , \quad (4)$$

si mostri che la distribuzione della radiazione diffusa non viene modificata dal termine magnetico.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (5)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (6)$$

Campo magnetico nel centro di una spira circolare di raggio a , percorsa dalla corrente I :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \hat{\mathbf{z}} , \quad (7)$$

dove $\hat{\mathbf{z}}$ è la direzione perpendicolare al piano della spira.

SOLUZIONI

1

a) Poiché i coefficienti di mutua induzione sono simmetrici conviene calcolare il flusso generato da una corrente I_a che scorra nella spira grande di raggio a attraverso la spira di raggio b . Essendo $b \ll a$ il campo magnetico nella zona di interesse può essere considerato uniforme e uguale al campo al centro, $B = \mu_0 I_a / (2a)$, e parallelo all'asse della spira grande. Abbiamo così

$$\Phi_{a \rightarrow b} \simeq \frac{\mu_0 I_a}{2a} \pi b^2 \cos \theta \equiv M_{ab} I_a, \quad (8)$$

da cui

$$M_{ab} = M_{ba} = \frac{\mu_0 \pi b^2 \cos \theta}{2a}. \quad (9)$$

b) Per il teorema di equivalenza di Ampère il flusso del campo del dipolo magnetico $\mathbf{m}$ attraverso la spira grande è lo stesso che sarebbe generato da una spiretta di raggio b , con asse parallelo a $\mathbf{m}$, in cui scorra una corrente $I_b = m / (\pi b^2)$. Per la (9) abbiamo

$$\Phi_{b \rightarrow a} = M_{ab} I_b = \left(\frac{\mu_0 \pi b^2 \cos \theta}{2a} \right) I_b = \left(\frac{\mu_0 \pi b^2 \cos \theta}{2a} \right) \left(\frac{m}{\pi b^2} \right) = \frac{\mu_0 m}{2a} \cos \theta \quad (10)$$

c) Il dipolo rotante forma un angolo con l'asse della spira di raggio a pari a $\theta = \omega t$, quindi avremo

$$RI = \mathcal{E} = - \frac{d}{dt} \frac{\mu_0 m}{2a} \cos \omega t = \frac{\mu_0 \omega m}{2a} \sin \omega t, \quad \text{da cui} \quad I = \frac{\mu_0 \omega m}{2aR} \sin \omega t. \quad (11)$$

La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P_d = RI^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 \omega m}{2a} \right)^2 \sin^2 \omega t. \quad (12)$$

Perché il moto avvenga a velocità angolare costante la potenza dissipata deve essere fornita dal lavoro del momento delle forze esterne $\boldsymbol{\tau}$. Quindi dobbiamo avere $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = P_d$. Quindi abbiamo

$$\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\omega} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\omega} = P_d \quad (13)$$

da cui

$$\tau = \frac{P_d}{\omega} = \frac{\omega}{R} \left(\frac{\mu_0 m}{2a} \right)^2 \sin^2 \omega t. \quad (14)$$

2

a) Consideriamo l'effetto del campo magnetico come una perturbazione all'oscillazione lungo y dell'elettrone. Pertanto possiamo procedere come suggerito calcolando la velocità e la forza a partire dalla traiettoria imperturbata ed adoperando il risultato ottenuto per calcolare la correzione al secondo ordine. Possiamo inoltre trascurare, nel calcolo della velocità, la dipendenza dei campi dalla posizione dell'elettrone, visto che l'effetto che ne risulta è di ordine superiore ($\sim (v/c)^2$), in particolare dello stesso ordine dei termini trascurati assumendo moto non relativistico ovvero un fattore $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \simeq 1$ per l'elettrone. Otteniamo quindi per la velocità, derivando la (3) rispetto al tempo:

$$\mathbf{v} = - \frac{eE_0}{m_e} \hat{\mathbf{y}} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(kx_0 - \omega t). \quad (15)$$

Il campo magnetico dell'onda è

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c} \hat{\mathbf{z}} \cos(kx_0 - \omega t) , \quad (16)$$

come si può ottenere immediatamente dall'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$. Si ha allora

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} = -\frac{eE_0^2}{m_e c \omega_0^2 - \omega^2} \hat{\mathbf{x}} \sin(kx - \omega t) \cos(kx_0 - \omega t) = -\frac{eE_0^2}{2m_e c \omega_0^2 - \omega^2} \hat{\mathbf{x}} \sin 2(kx_0 - \omega t) . \quad (17)$$

Con una appropriata scelta dell'origine delle coordinate possiamo infine porre $x_0 = 0$. Mettendo insieme questo termine con gli altri, si ottiene la forza di Lorentz

$$\mathbf{F} \simeq -eE_0 \hat{\mathbf{y}} \cos(\omega t) + \frac{e^2 E_0^2}{2m_e c \omega_0^2 - \omega^2} \hat{\mathbf{x}} \sin(2\omega t) , \quad (18)$$

dove il primo termine è diretto lungo y , mentre il secondo termine lungo x : pertanto il moto in direzione y non è perturbato dalla presenza del campo magnetico, ma si aggiunge a questo una oscillazione lungo x di frequenza 2ω . La soluzione a regime per il moto lungo x è

$$x(t) = \frac{e^2 E_0^2}{2m_e^2 c (\omega_0^2 - 4\omega^2) \cdot (\omega_0^2 - \omega^2)} \hat{\mathbf{x}} \sin(2\omega t) . \quad (19)$$

b) La forza dovuta alla componente magnetica dei campi induce oscillazioni lungo l'asse x alla frequenza 2ω . Si avrà quindi radiazione diffusa (di dipolo) alla seconda armonica con ampiezza massima nel piano yz , in particolare quindi lungo la direzione $\hat{\mathbf{y}}$ lungo la quale non si osserva radiazione alla frequenza ω . Le emissioni a diversa frequenza non interferiscono. Si ha risonanza se $\omega \rightarrow \omega_0/2$ ma la procedura approssimata in tal caso deve essere riconsiderata.

c) Nel caso di polarizzazione circolare si ha, ricalcando i conti eseguiti nel punto a),

$$\mathbf{v} = \frac{eE_0}{m_e} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \text{Re} [(\hat{\mathbf{y}} - i\hat{\mathbf{z}})e^{i(-\omega t)}] = \frac{eE_0}{m_e} \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} [\hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t) - \hat{\mathbf{z}} \cos(\omega t)] , \quad (20)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{c} [\hat{\mathbf{z}} \cos(\omega t) - \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t)] , \quad (21)$$

$$\mathbf{v} \times \mathbf{B} \propto \hat{\mathbf{x}} [\sin(\omega t) \cos(\omega t) - \cos(\omega t) \sin(\omega t)] = 0 , \quad (22)$$

pertanto il termine di forza magnetica si annulla e né la traiettoria né la diffusione risultano modificate.