

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018-2019

Compito di Fisica 2 (30/01/2020)

1

Una spira circolare di raggio a , resistenza R e coefficiente di autoinduzione L è posta in un campo magnetico uniforme e oscillante $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \cos \omega t = \text{Re}(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t})$ che forma un angolo α con l'asse della spira, come in figura. a) Calcolare la corrente I indotta nella spira e la potenza dissipata nella spira (mediata sul periodo di oscillazione) in condizioni di regime. Determinare la condizione su L per cui gli effetti di autoinduzione sono trascurabili (si può assumere che lo siano per le domande seguenti).

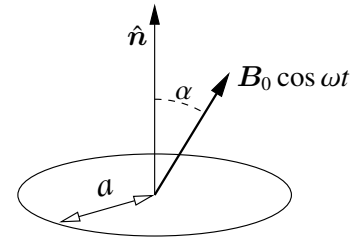


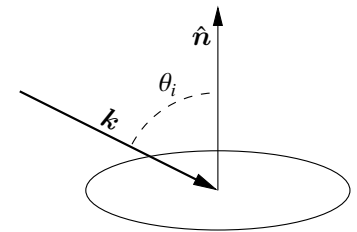
Figura 1:

Un'onda elettromagnetica piana, avente lunghezza d'onda $\lambda \gg a$, linearmente polarizzata e avente ampiezza del campo elettrico E_0 , incide su un'antenna ricevente circolare schematizzabile come la spira sopra descritta con un angolo di incidenza θ_i .

- b) Calcolare la corrente I generata nell'antenna in funzione di θ_i per polarizzazione dell'onda sia parallela che ortogonale al piano della spira.
- c) Calcolare la potenza media P_{irr} diffusa dall'antenna e i suoi rapporti con la potenza dissipata e con la potenza incidente (ovvero il flusso di energia elettromagnetica dell'onda attraverso la superficie della spira), mostrando che i rapporti si possono scrivere a meno di fattori numerici come

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{dis/inc}}} \propto \left(\frac{a}{\lambda}\right)^k \left(\frac{Z_0}{R}\right)^l,$$

(1) Figura 2: Onda incidente con polarizzazione p o s



dove $Z_0 = (\mu_0/\epsilon_0)^{1/2} = 376.37 \text{ Ohm}$ e k, l sono coefficienti da determinare.

2

In due fili infiniti e paralleli posti a distanza d nel sistema S del laboratorio scorrono rispettivamente le intensità di corrente $+I$ e $-I$.

- a) Calcolare la forza per unità di lunghezza tra i fili.

Si consideri ora un sistema di riferimento S' che si muove rispetto a S con velocità $\mathbf{V}$ parallela ai fili. Calcolare in S'

- b) l'intensità di corrente I' e la densità lineare di carica λ' sui fili, e i campi magnetico $\mathbf{B}'$ ed elettrico $\mathbf{E}'$,

- c) la forza per unità di lunghezza tra i fili, confrontandola col valore in S .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

“Impedenza del vuoto”

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.37 \, \Omega . \quad (3)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} . \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo magnetico $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^5} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 . \quad (5)$$

Teorema di conservazione dell’energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (6)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) , \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) , \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp , \quad (7)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel , \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel , \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c) . \quad (8)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) Nel formalismo complesso, il flusso del campo magnetico esterno attraverso la spira è

$$\tilde{\Phi}_{\text{ext}} = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{S} = \pi a^2 B_0 \cos \alpha e^{-i\omega t} \quad (10)$$

mentre il flusso generato dall'autoinduzione è

$$\tilde{\Phi}_L = L\tilde{I} = L \frac{\tilde{\mathcal{E}}}{R} \quad (11)$$

dove $\tilde{I}$ è la corrente che circola nella spira, e $\tilde{\mathcal{E}}$ la forza elettromotrice. Il flusso totale del campo magnetico attraverso la spira è così $\tilde{\Phi}_{\text{tot}} = \tilde{\Phi}_{\text{ext}} + \tilde{\Phi}_L$. D'altra parte, per la legge di Faraday la f.e.m vale

$$\tilde{\mathcal{E}} = -\frac{d\tilde{\Phi}_{\text{tot}}}{dt} = -\frac{d\tilde{\Phi}_{\text{ext}}}{dt} - \frac{d\tilde{\Phi}_L}{dt} = i\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha e^{-i\omega t} - \frac{L}{R} \frac{d\tilde{\mathcal{E}}}{dt}. \quad (12)$$

Scrivendo la forza elettromotrice complessa nella forma $\tilde{\mathcal{E}} = \tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t}$, dove $\tilde{\mathcal{E}}_0$ è una costante complessa da determinare, la (12) si riscrive

$$\mathcal{E}_0 e^{-i\omega t} = i\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha e^{-i\omega t} + i\omega \frac{L}{R} \mathcal{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \text{da cui} \quad \left(1 + i\omega \frac{L}{R}\right) \tilde{\mathcal{E}}_0 = i\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha \quad (13)$$

che porta a

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}_0 &= \frac{i\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{1 + i\omega(L/R)} = \frac{i\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{1 + \omega^2(L/R)^2} \left(1 - i\omega \frac{L}{R}\right) = \frac{\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{1 + \omega^2(L/R)^2} \left(\omega \frac{L}{R} + i\right) \\ &= \frac{\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{1 + \omega^2(L/R)^2} \sqrt{1 + \omega^2 \frac{L^2}{R^2}} e^{i\varphi} = \frac{\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{\sqrt{1 + \omega^2(L/R)^2}} e^{i\varphi}, \quad \text{dove} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{R}{\omega L}\right). \end{aligned} \quad (14)$$

Abbiamo usato la relazione $a+ib = r e^{i\varphi}$, con $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $\varphi = \arctan(b/a)$. La forza elettromotrice è quindi

$$\mathcal{E} = \text{Re} \left(\tilde{\mathcal{E}}_0 e^{-i\omega t} \right) = \frac{\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha}{\sqrt{1 + \omega^2(L/R)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (15)$$

e la potenza dissipata mediata su un periodo vale

$$P_{\text{diss}} = \left\langle \frac{\mathcal{E}^2}{R} \right\rangle = \frac{(\omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha)^2}{2R[1 + \omega^2(L/R)^2]}. \quad (16)$$

Se $L \ll R/\omega$ (notare che in questo caso $\varphi \rightarrow \pi/2$, quindi $\cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \sin \omega t$) la (15) diventa

$$\mathcal{E} = \omega\pi a^2 B_0 \cos \alpha \sin \omega t. \quad (17)$$

indipendente da L .

b) Sia θ_i l'angolo di incidenza, cioè l'angolo formato dal vettore d'onda $\mathbf{k}$ con la normale alla superficie della spira, come in Fig 2. Poiché i campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ formano con $\mathbf{k}$ una terna ortogonale, per polarizzazione parallela alla superficie della spira (polarizzazione p) il campo $\mathbf{B}$ forma un angolo

$\alpha = \pi/2 - \theta_i$ con la normale alla superficie. Quindi, nel limite $a \ll \lambda$, il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la spira è dato da

$$\Phi = \tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{S} = \pi a^2 B_0 \sin \theta_i e^{-i\omega t}, \quad (18)$$

con $B_0 = E_0/c$. La corrente I che circola nella spira è così data, in base alla (15), da

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\omega \pi a^2 B_0 \sin \theta_i}{R \sqrt{1 + \omega^2 (L/R)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \quad (19)$$

che, in caso di poter trascurare l'effetto dell'autoinduzione, si riduce a

$$I = \frac{\omega \pi a^2 B_0 S \sin \theta_i}{R} \sin(\omega t), \quad (20)$$

Se invece l'onda è polarizzata s, cioè se $\mathbf{E}$ giace nel piano ortogonale alla superficie della spira, allora $\mathbf{B}$ è parallelo alla superficie stessa e il flusso è nullo.

c) Il momento magnetico della spira è dato in modulo da $|\mathbf{m}| = \pi a^2 I$. Dato che $\ddot{\mathbf{m}} = -\omega^2 \mathbf{m}$, la potenza irradiata in approssimazione di radiazione di dipolo magnetico, mediata sul periodo, è

$$P_{\text{irr}} = 2 \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^4}{3c^5} \langle I^2 \rangle, \quad (21)$$

e quindi, inserendo la (16),

$$P_{\text{irr}} = 2 \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^4}{3c^5 R} P_{\text{diss}}. \quad (22)$$

Si ha quindi

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{diss}}} = 2 \frac{\pi a^4 \omega^4}{12 \varepsilon_0 c^5 R} = 2 \frac{\pi}{12} \left(\frac{a\omega}{c} \right)^4 \frac{Z_0}{R} = \frac{8\pi^5}{3} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 \frac{Z_0}{R}. \quad (23)$$

La potenza incidente sulla spira è data da $P_{\text{inc}} = \pi a^2 |\mathbf{S}| \sin \theta_i$ con $|\mathbf{S}| = c \varepsilon_0 E_0^2 / 2 = c^3 \varepsilon_0 B_0^2 / 2$, da cui

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0 (\pi a^2)^2 \omega^4}{3c^5} \left(\frac{\omega B_0 \pi a^2 \sin \theta_i}{R} \right)^2 = \frac{k_0 (\pi a^2)^4 \omega^6 \sin^2 \theta_i}{6\pi \varepsilon_0^2 c^8 R^2} |\mathbf{S}| = \frac{32\pi^8 \sin^2 \theta_i}{3 \cos \theta_i} \left(\frac{a}{\lambda} \right)^6 \left(\frac{Z_0}{R} \right)^2 P_{\text{inc}}. \quad (24)$$

2

a) Il campo magnetico generato da un filo a distanza r vale

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}. \quad (25)$$

La forza tra i due fili vale, per unità di lunghezza,

$$\frac{dF}{d\ell} = -IB(d) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \quad (26)$$

dove il segno meno indica che la forza è *repulsiva*.

b) Dato che $(\lambda/c, I)$ trasforma come un quadrivettore abbiamo

$$I' = \gamma I, \quad \lambda' = -\beta \gamma I/c \quad \text{con} \quad \beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (27)$$

Ogni filo genera adesso un campo magnetico $\mathbf{B}' = \gamma\mathbf{B}$ e un campo elettrico

$$\mathbf{E}' = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}} . \quad (28)$$

In alternativa uno può ottenere direttamente i campi dalla trasformazione di $\mathbf{B}$ e da essi le sorgenti.

c)

Il termine di forza magnetica è proporzionale a $B'I'$ e risulta quindi

$$\frac{dF'_B}{d\ell'} = \gamma^2 \frac{dF}{d\ell} . \quad (29)$$

A questo si aggiunge un termine di forza elettrica *attrattiva*,

$$\frac{dF'_E}{d\ell'} = \lambda' E'(d) = \beta^2 \gamma^2 \frac{dF}{d\ell} . \quad (30)$$

In totale

$$\frac{dF'_B}{d\ell'} + \frac{dF'_E}{d\ell'} = (-\gamma^2 + \beta^2 \gamma^2) \frac{dF}{d\ell} = \frac{dF}{d\ell} \quad (31)$$

ovvero la forza tra i due fili per unità di lunghezza è invariante. Se invece si considera la forza su un tratto di filo di lunghezza ℓ , per effetto della contrazione delle lunghezze la forza aumenta di un fattore γ .