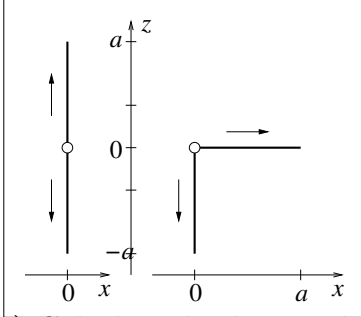


Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018-2019

Compito di Fisica 2 (08/01/2020)

1



Un'antenna rettilinea dipolare alimentata al centro di lunghezza $2a$ è schematizzabile come un conduttore cilindrico sottile di resistenza R esteso da $z = -a$ a $z = +a$, lungo il quale scorre la corrente (mantenuta da un opportuno generatore ideale e uniformemente distribuita in direzione trasversa)

$$I = I(z, t) = \text{Re} \left[I_0 \left(1 - \frac{|z|}{a} \right) e^{-i\omega t} \right] . \quad (1)$$

a) Calcolare il valore medio sul periodo della potenza dissipata per effetto Joule P_{dis} (si tenga conto del fatto che la corrente *non* è uniforme lungo z !).

b) Mostrare che la densità di carica lineare sull'antenna (ℓ) e il momento di dipolo elettrico ($\mathbf{p}$) sono dati da

$$\ell = \text{Re} \left[\pm \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} \right] ; , \quad \mathbf{p} = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{z}} \frac{iI_0 a}{\omega} e^{-i\omega t} \right] . \quad (2)$$

c) Considerando l'irraggiamento di dipolo elettrico dall'antenna, determinare in quali direzioni angolari la potenza irradiata è nulla o massima.

d) Calcolare il valore medio sul periodo della potenza irradiata P_{irr} , mostrando che si può scrivere

$$P_{\text{irr}} = \alpha Z_0 I_0^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^\beta , \quad (3)$$

con $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 376.37 \, \Omega$ e α, β coefficienti da determinare. Si dica per quali valori di R il rapporto $P_{\text{irr}}/P_{\text{dis}} = 1$ assumendo $a = \lambda/4$.

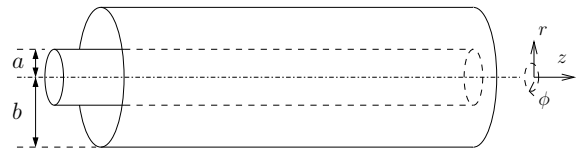
Si ipotizza adesso di piegare orizzontalmente (lungo l'asse x) la metà superiore dell'antenna, senza perturbare l'intensità di corrente e la densità di carica lungo l'antenna stessa.

e) Si dica nuovamente in quali direzioni angolari la potenza irradiata è nulla o massima, e si confrontino i valori di P_{irr} e P_{dis} (a parità di tutti i parametri) col caso dell'antenna rettilinea.

2

Un cavo coassiale infinito è costituito da un sottile conduttore cilindrico interno di raggio a e da un conduttore cilindrico esterno di raggio b , con $b > a$.

a) Se sui conduttori si trova la densità di carica per unità di lunghezza $\Delta Q/\Delta z = \pm \ell$ uniforme e costante, uguale in modulo e di segno opposto su ciascun conduttore, determinare il campo elettrico $\mathbf{E}$ all'interno del cavo ($a < r < b$).



b) Se nei conduttori scorre l'intensità di corrente $\pm I$ uniforme e costante, uguale in modulo e di segno opposto in ciascun conduttore, determinare il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno del cavo. Si assuma ora che le densità lineari di carica e l'intensità di corrente sui conduttori siano date rispettivamente da $\pm \ell = \pm \ell(z, t)$ e $\pm I = \pm I(z, t)$ con

$$\ell(z, t) = \ell_0 \cos(kz - \omega t) , \quad I = I_0 \cos(kz - \omega t) . \quad (4)$$

c) Determinare la relazione tra ℓ_0 e I_0 .

d) Mostrare che i campi elettrico e magnetico all'interno del cavo hanno le componenti non nulle

$$E_r(r, z, t) = E_r(r) \cos(kz - \omega t) , \quad B_\phi(r, z, t) = B_\phi(r) \cos(kz - \omega t) , \quad (5)$$

dove $E_r(r)$ e $B_\phi(r)$ hanno la stessa forma delle soluzioni dei problemi statici trovate ai punti **a)** e **b)**.

e) Determinare la relazione tra ω e k .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (6)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (7)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (8)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) Consideriamo l'antenna come una serie di resistenze infinitesime $dR = (R/2a)dz$. La potenza dissipata è allora data da

$$P_{\text{dis}} = \int \langle I^2 \rangle dR = \int_{-a}^{+a} \frac{I_0^2}{2} \left(1 - \frac{|z|}{a}\right)^2 \frac{R}{2a} dz = \frac{I_0^2 R}{6}. \quad (10)$$

b) La densità di carica lineare sull'antenna si ottiene dall'equazione di continuità $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui

$$\ell = \pm \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t}, \quad (11)$$

dove il segno $+$ o $-$ si ha per $z > 0$ o $z < 0$, rispettivamente. La densità di carica è quindi uniforme su ogni metà dell'antenna. Per simmetria, l'unica componente non nulla del momento di dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è lungo z ed è data da

$$p_z = \int_{-a}^{+a} z \ell dz = 2 \int_0^{+a} \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} z dz = \frac{iI_0 a}{\omega} e^{-i\omega t}. \quad (12)$$

c) La potenza irradiata dall'antenna varia come $\sin^2 \theta$ dove θ è l'angolo rispetto alla direzione del momento di dipolo elettrico. Quindi la potenza è nulla lungo la direzione parallela all'antenna (z) e massima nel piano $z = 0$.

d) Il valore totale della potenza irradiata è

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0}{3c^3} (|\ddot{p}_z|^2) = \frac{k_0}{3c^3} (I_0 \omega a)^2 = \frac{\pi}{3} Z_0 I_0^2 \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (13)$$

Si ha quindi

$$\frac{P_{\text{irr}}}{P_{\text{dis}}} = 2\pi \frac{Z_0}{R} \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2. \quad (14)$$

...
e) L'antenna "piegata" ha densità di carica $(iI_0/a\omega)e^{-i\omega t}$ sul braccio orizzontale e opposta sul braccio verticale. Il momento di dipolo elettrico ha ora due componenti:

$$p_x = \int_0^a \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} x dx = \frac{iI_0 a}{2\omega} e^{-i\omega t}, \quad p_z = - \int_{-a}^0 \frac{iI_0}{a\omega} e^{-i\omega t} z dz = \frac{iI_0 a}{2\omega} e^{-i\omega t}. \quad (15)$$

Il dipolo elettrico è diretto lungo la diagonale dell'antenna. L'emissione è quindi nulla lungo la diagonale e massima nel piano perpendicolare a tale direzione.

Possiamo calcolare la potenza irradiata (in media sul periodo) come somma delle potenze emesse dai dipoli p_x e p_z :

$$P_{\text{irr}} = \frac{k_0}{3c^3} (|\ddot{p}_x|^2 + |\ddot{p}_z|^2) = \frac{k_0}{6c^3} (I_0 \omega a)^2 \quad (16)$$

Questo valore è la metà della potenza emessa dall'antenna rettilinea. La potenza dissipata è invece la stessa.

2

a) Per simmetria il campo elettrico deve essere radiale. Applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale col cavo, avente raggio r (con $a < r < b$) e altezza h otteniamo

$$2\pi r h E_r = \frac{\ell h}{\varepsilon_0}, \quad E_r = \frac{\ell}{2\pi \varepsilon_0 r}. \quad (17)$$

b) Per simmetria il campo magnetico deve essere azimutale. Dalla legge della circuitazione di Ampère applicata a una circonferenza di raggio r con centro sull'asse abbiamo

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I, \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (18)$$

c) L'equazione di continuità, ovvero la legge di conservazione della carica elettrica, impone la relazione $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui

$$\partial_t \ell = \pm k I_0 \sin(kz - \omega t), \quad \ell = \pm \frac{k}{\omega} I_0 \cos(kz - \omega t). \quad (19)$$

d) I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ hanno la stessa struttura del caso statico, per cui, sfruttando la relazione tra I_0 e $\ell_0 = k I_0 / \omega$,

$$E_r = E_r(r, z, t) = \frac{\ell(z, t)}{2\pi \varepsilon_0 r} = \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi \varepsilon_0 r} \cos(kz - \omega t), \quad (20)$$

$$B_\phi = B_\phi(r, z, t) = \frac{\mu_0 I(z, t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos(kz - \omega t). \quad (21)$$

Questi campi soddisfano le leggi di Gauss e di Ampère-Maxwell, ovvero le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ e $(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$.

e) I campi trovati al punto precedente devono soddisfare la legge di Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, che si riduce a $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$, da cui

$$-k \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi \varepsilon_0 r} \sin(kz - \omega t) = -\omega \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin(kz - \omega t) \quad (22)$$

da cui, eliminando i fattori comuni e ricordando che $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, si ottiene

$$k^2 c^2 = \omega^2, \quad (23)$$

ovvero $\omega = kc$.