

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2 (13/01/2023)

1

Due sfere conduttrici identiche di raggio a sono poste a distanza $d > 2a$ in un mezzo dielettrico perfettamente isolante con permittività $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$. Un generatore stabilisce tra le due sfere la d.d.p. V_0 e viene poi disconnesso.

Trascurando, nel limite $d \gg 2a$, gli effetti di induzione elettrostatica calcolare

- la carica su ciascuna sfera,
- la forza tra le due sfere.
- Si risponda nuovamente alla domanda **a)** tenendo conto degli effetti di induzione elettrostatica al primo ordine in d/a .

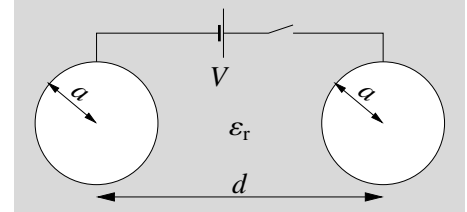


Figura 1:

2

Si consideri un metallo con permittività dielettrica data dall'espressione (valida in un opportuno intervallo di frequenze)

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad (1)$$

- Facendo incidere perpendicolarmente un'onda elettromagnetica di lunghezza d'onda λ su una lastra infinitamente spessa del metallo si osserva riflessione totale per $\lambda > \lambda_c \equiv 138 \text{ nm}$. Determinare da questa informazione il valore di ω_p .
- Se l'incidenza dell'onda è obliqua ad angolo θ , si dimostri che si ha riflessione totale anche per lunghezze d'onda tali che $\lambda_c > \lambda > \lambda_c \cos \theta$.
- Si consideri ora una piccola sfera di raggio a del materiale descritto al punto **a)** Se un'onda piana di frequenza ω incide sulla sfera, calcolare la potenza della radiazione diffusa determinando per quale valore di ω la potenza è massima.
(Si usi l'espressione del campo interno a una sfera dielettrica in campo esterno uniforme, giustificando l'uso di questa espressione e dando valori per ω e a consistenti con le approssimazioni fatte.)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (2)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0(1 + \chi)\mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (4)$$

Campo elettrico interno a una sfera dielettrica con permittività ε_r in campo elettrico esterno $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r + 2} . \quad (5)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (6)$$

Relazione di dispersione per un mezzo con indice di rifrazione $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\omega)$

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{k}^2 c^2}{\mathbf{n}^2} . \quad (7)$$

Legge di Snell per la rifrazione alla superficie tra due mezzi con diverso indice di rifrazione

$$\frac{\sin(\theta_1)}{\sin(\theta_2)} = \frac{\mathbf{n}_2}{\mathbf{n}_1} . \quad (8)$$

...

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria i potenziali delle sfere sono $\pm V_0/2$. Trascurando l'induzione elettrostatica le sfere hanno cariche $\pm Q$ uniformemente distribuite sulle loro superfici, che generano rispettivamente i potenziali

$$\Phi_{\pm}(r_{\pm}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\pm Q}{r_{\pm}} \quad (9)$$

con $r_{\pm}$ le distanze dai centri delle due sfere. Trascurando i potenziali generati da una sfera sull'altra e posto $\Phi_{\pm}(a) = \pm V_0/2$ si ottiene

$$Q = 2\pi\epsilon a V_0. \quad (10)$$

b) La forza è equivalente a quella tra due cariche puntiformi $\pm Q$ poste nei centri delle sfere, è attrattiva e vale in modulo

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q^2}{d^2} \quad (11)$$

c) All'ordine più basso gli effetti di induzione elettrostatica possono essere inclusi ponendo una carica immagine $\pm q$ con $q = (a/d)Q$ a distanza $d' = a^2/d$ dal centro delle rispettive sfere, e aggiungendo la carica $\mp q$ alle cariche immagine al centro $\pm Q$ rispettivamente. Il potenziale delle sfere è dato al primo ordine di a/d da

$$\phi_{\pm}(a) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\pm(Q - q)}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\pm Q}{a} \left(1 - \frac{a}{d}\right) \quad (12)$$

da cui

$$Q = \frac{2\pi\epsilon a V_0}{[1 - (a/d)]}. \quad (13)$$

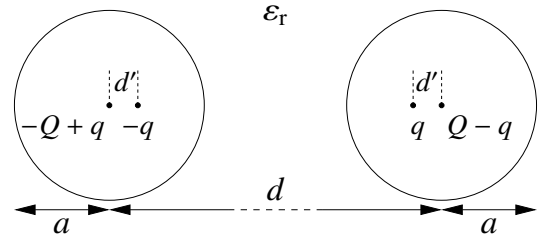


Figura 2:

2

a) Si ha riflessione totale se $\epsilon_r < 0$, il che richiede $\omega < \omega_p$. Si ha allora $\lambda_c = 2\pi c/\omega_p$ da cui $\omega_p = 2\pi \times 2.17 \times 10^{15} \text{ s}^{-1} = 1.36 \times 10^{16} \text{ s}^{-1}$.

b) La legge di Snell fornisce la relazione tra θ_i e l'angolo di rifrazione θ_r

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{1}{n}, \quad n^2 = \epsilon_r \quad (14)$$

Si ha riflessione totale se $\sin \theta_r \geq 1$, da cui otteniamo

$$\omega^2 < \omega_p^2 \cos^2 \theta \quad (15)$$

da cui $\lambda > \lambda_c \cos \theta$.

Se non ci si ricorda la legge di Snell la dimostrazione è la seguente. Per incidenza obliqua il vettore d'onda dell'onda incidente $\mathbf{k}_0 = (k_{0x}, k_{0y}) = (\omega/c)(\cos \theta, \sin \theta)$ con le direzioni x e y rispettivamente perpendicolare e parallela alla superficie. La relazione di dispersione nel metallo è

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \quad (16)$$

Dato che $k_y = k_{y0} = (\omega/c) \sin \theta$, si può riscrivere

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} (\varepsilon - \sin^2 \theta) \quad (17)$$

L'evanescenza richiede $k_x^2 < 0$ da cui $\varepsilon - \sin^2 \theta < 0$ che con pochi semplici passaggi fornisce nuovamente $\lambda > \lambda_c \cos \theta$.

c) L'espressione elettrostatica per un campo uniforme vale a basse frequenze tali che $a \ll \lambda$.

Il momento di dipolo della sfera è

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi a^2}{3} \mathbf{P} = \frac{4\pi a^2}{3} \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}_i = 4\pi a^2 \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2} \mathbf{E}_i \quad (18)$$

Si ha un massimo di diffusione (fluorescenza di risonanza) se $\varepsilon_r + 2 = 0$ ovvero $\omega = \omega_p/\sqrt{3}$. La condizione $a \ll \lambda$ vicino alla risonanza richiede allora $a \ll 10^2$ nm.