

# Corso di Laurea in Fisica

## Anno Accademico 2022-2023

---

---

### Compito di Fisica 2 (12/01/2024)

---

---

1

Una particella di carica  $q$  e massa  $m$  è legata da un campo di forza centrale  $\mathbf{F} = -m\omega_0^2\mathbf{r}$ .

a) Assumendo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio  $a$  nel piano  $xy$ , determinare la frequenza  $\omega$  della radiazione emessa e la potenza irradiata  $P_r$ .

b) Per effetto dell'irraggiamento la carica perde energia: calcolare la variazione temporale del raggio dell'orbita  $a = a(t)$  (con  $a(0) = a_0$ ) assumendo che l'energia persa per un periodo di rivoluzione sia piccola rispetto all'energia totale (si dia a posteriori una condizione di validità dell'ipotesi).

2

Una linea di trasmissione ad alta tensione è schematizzabile come due fili paralleli infiniti di raggio  $a$ , posti a distanza  $d$  e sospesi a un'altezza  $h$  da terra. Le densità di carica per unità di lunghezza e l'intensità di corrente sono date rispettivamente da  $\pm\ell(z, t)$  e  $\pm I(z, t)$  con

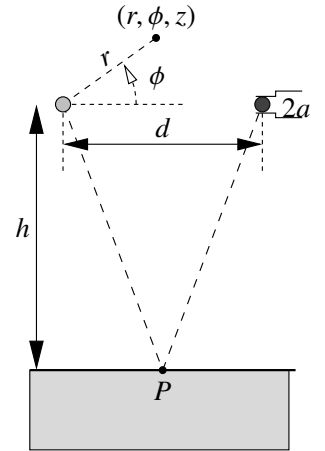
$$\ell = \ell(z, t) = \ell_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad I = I(z, t) = I_0 e^{ikz - i\omega t}, \quad (1)$$

dove  $z$  è la coordinata lungo i fili. Dimostrare che

a)  $I_0 = v_f \ell_0$  dove  $v_f = \omega/k$ ;

b) i campi elettromagnetici generati da ciascun filo sono dati per  $r \geq a$  da

$$\mathbf{E}(r, z, t) = \hat{\mathbf{r}} E(a) \frac{a}{r} e^{ikz - i\omega t}, \quad \mathbf{B}(r, z, t) = \hat{\phi} B(a) \frac{a}{r} e^{ikz - i\omega t}, \quad (2)$$



dove  $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$  è la distanza dal filo considerato, determinando le espressioni di  $E(a)$  e  $B(a)$  in funzione di  $I_0$ ,  $a$ ;

c)  $v_f = c$ .

d) Stimare il campo elettrico alla superficie di ciascun filo  $E(a)$ , la differenza di potenziale tra i fili e i campi elettrico e magnetico generati alla superficie terrestre sull'asse  $P$  equidistante dai fili. Si diano valori numerici (almeno come ordine di grandezza) assumendo come valori tipici  $I_0 = 10^3$  A,  $a = 5$  cm,  $d = 5$  m,  $h = 30$  m e  $\omega = 2\pi \times 50$  s $^{-1}$ .

e) Quando varrebbero i campi nel punto  $P$  se la Terra fosse perfettamente conduttrice e diamagnetica?

**NB** Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

## FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad (3)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (4)$$

Equazione di continuità per la carica elettrica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (5)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = I d\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} . \quad (6)$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (7)$$

# SOLUZIONI

## 1

a) Per una forza centrale armonica abbiamo  $\omega = \omega_0$  indipendentemente da  $a$ . L'orbita viene percorsa a velocità  $v = a\omega_0$ . Il momento di dipolo  $\mathbf{p}$  vale

$$\mathbf{p} = qa (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) , \quad (8)$$

quindi

$$\ddot{\mathbf{p}} = -qa\omega_0^2 (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) . \quad (9)$$

Per la potenza irradiata abbiamo

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 \quad (10)$$

che è indipendente dal tempo.

b) L'energia totale è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, che sono uguali

$$U = U_{\text{pot}} + K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 = m \omega_0^2 a^2 . \quad (11)$$

Supponendo che tutta l'energia persa vada in energia irradiata abbiamo

$$P_r = -\frac{dU}{dt} , \quad (12)$$

che, combinata con la (10), ci dà

$$2m\omega_0^2 a \frac{da}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 , \quad (13)$$

ovvero

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_0 q^2 \omega_0^2}{3mc^3} a = -\frac{a}{\tau} , \quad (14)$$

con soluzione  $a(t) = a(0) e^{-t/\tau}$ : il moto è a spirale, con

$$\tau = \frac{3mc^3}{k_0 q^2 \omega_0^2} . \quad (15)$$

L'approssimazione usata è valida se  $\tau \gg 2\pi/\omega_0$ , cioè se il tempo di spiraleggiamento è molto lungo rispetto al periodo dell'orbita.

## 2

a) L'equazione di continuità per la densità lineare di carica si scrive  $\partial_t \ell = -\partial_z I$ , da cui  $-i\omega \ell_0 = -ik I_0$  ovvero  $I_0 = v_f \ell_0$ .

b) Rispetto ad un asse coincidente col filo il campo  $\mathbf{E}$  generato dal filo stesso ha simmetria cilindrica ed è radiale. Applicando il teorema di Gauss ad una superficie cilindrica di raggio  $r$  coassiale col filo si ha  $2\pi r E_r = \ell/\epsilon_0$ , da cui  $E_r = \ell/(2\pi\epsilon_0 r)$  ed  $E(a) = \ell_0/(2\pi\epsilon_0 a)$ .

Il campo  $\mathbf{B}$  ha simmetria cilindrica ed è solenoidale. Applicando il teorema di Ampère ad una circonferenza di raggio  $r$  ortogonale e centrata rispetto al filo, si ha  $2\pi r B_\phi = \mu_0 I$ , da cui  $B_\phi =$

$\mu_0 I / (2\pi r)$ . Notare che la corrente di spostamento non contribuisce essendo trasversale, quindi il suo flusso attraverso il cerchio di raggio  $r$  è nullo.

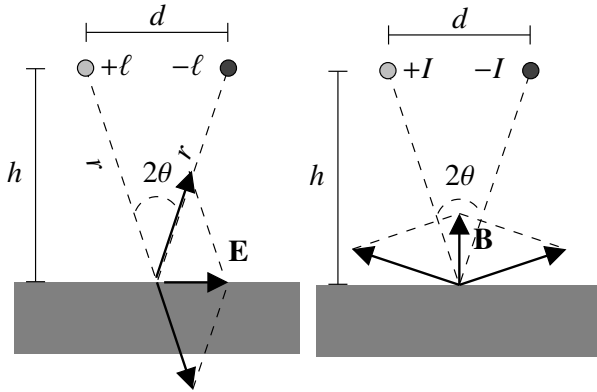
c) L'equazione  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$  proiettata in direzione  $\hat{\phi}$  fornisce  $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$  ovvero, nel caso presente,  $ik\ell/\varepsilon_0 = i\omega\mu_0 I_0$ . Usando il risultato del punto a) e  $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$  si ottiene  $v_f = c$ .

d) Alla superficie di ciascun filo possiamo trascurare gli effetti dell'altro filo e possiamo scrivere

$$E(a) \simeq \frac{\ell_0}{2\pi\varepsilon_0 a} = \frac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 c a} \simeq 10^6 \text{ V m}^{-1}. \quad (16)$$

La differenza di potenziale tra i due fili si può calcolare dall'integrale di linea lungo un segmento congiungente i due fili stessi,

$$\begin{aligned} |V| &= \int_{-d+a}^{+d-a} E(a) a \left( \frac{1}{x+d} - \frac{1}{d-x} \right) dx = 2E(a)a \log(2d/a - 1) \simeq 2 \times 10^6 \times (5 \times 10^{-2}) \times 5 \text{ V} \\ &= 5 \times 10^5 \text{ V}. \end{aligned} \quad (17)$$



Fissato un piano ortogonale ai fili, nel punto della superficie terrestre equidistante dai fili  $r = \sqrt{h^2 + d^2/4}$ . La somma vettoriale dei campi generati da ciascun filo dà (omettendo la dipendenza da  $z$  e  $t$ )

$$\mathbf{E} = 2\hat{\mathbf{x}} \frac{\ell_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \sin \theta, \quad \mathbf{B} = 2\hat{\mathbf{y}} \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin \theta, \quad (18)$$

essendo  $\hat{\mathbf{x}}$  e  $\hat{\mathbf{y}}$  le direzioni parallela e ortogonale al piano terrestre (e al piano dei fili), rispettivamente.

Essendo  $\sin \theta = d/(2r)$ , si ha

$$|E_x| = \frac{I_0 d}{2\pi c \varepsilon_0 r^2}, \quad |B_y| = \frac{\mu_0 I_0 d}{2\pi r^2} = \frac{|E_x|}{c}. \quad (19)$$

Quindi

$$|B_y| = \frac{4\pi \times 10^{-7} \times 10^3 \times 5}{2\pi \times (30^2 + 5^2/2^2)} \text{ T} \simeq 10^{-6} \text{ T}, \quad |E_x| \simeq 3 \times 10^2 \text{ V/m}. \quad (20)$$

Per confronto, alla superficie terrestre il campo magnetico medio è  $\sim 5 \times 10^{-5} \text{ T}$  e quello elettrico  $\sim 1.5 \times 10^2 \text{ V/m}$ .

d)

Se consideriamo la Terra come perfettamente conduttrice (approssimazione accettabile per le basse frequenze in gioco) e diamagnetica, possiamo risolvere il problema dei campi introducendo due fili immagine, ciascuno disposto parallelamente al filo reale e in posizione simmetrica rispetto alla superficie terrestre e avente valori opposti di densità di carica e intensità di corrente, come in figura. Dalla somma vettoriale si vede immediatamente che nel punto della superficie sopra considerato  $\mathbf{E} = 0$  e  $\mathbf{B} = 0$  come devono, in quanto i campi elettrico e magnetico alla superficie di un conduttore devono essere rispettivamente perpendicolare e parallelo alla superficie stessa.

