

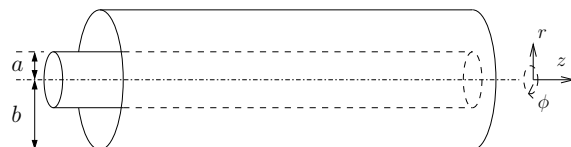
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (07/02/2012)

1

Un cavo coassiale è costituito da un sottile conduttore cilindrico interno di raggio a e da un conduttore cilindrico esterno di raggio b , con $b > a$.



a)* Se sui conduttori si trova la densità di carica per unità di lunghezza $\Delta Q/\Delta z = \pm \ell$ uniforme e costante, uguale in modulo e di segno opposto su ciascun conduttore, determinare il campo elettrico $\mathbf{E}$ all'interno del cavo ($a < r < b$).

b)* Se nei conduttori scorre l'intensità di corrente $\pm I$, uguale in modulo e di segno opposto in ciascun conduttore, determinare il campo magnetico $\mathbf{B}$ all'interno del cavo.

c)* Mostrare che la capacità e l'induttanza per unità di lunghezza del cavo sono date da

$$\mathcal{C} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\log(b/a)}, \quad \mathcal{L} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log(b/a). \quad (1)$$

Si assuma ora che nei conduttori scorra la corrente $I = \pm I_0 \cos(kz - \omega t)$.

d) Determinare la densità di carica (per unità di lunghezza) $\ell = \ell(z, t)$ su ciascun conduttore,

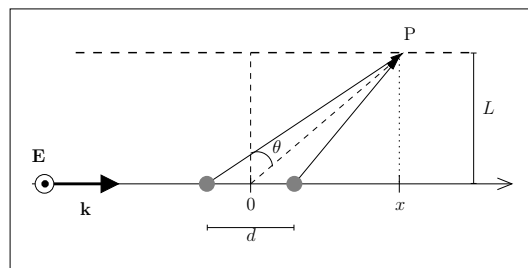
e) Determinare i campi elettrico e magnetico all'interno del cavo, mostrando che essi hanno la forma di modi TEM con componenti non nulle

$$E_r(r, z, t) = E_r(r) \cos(kz - \omega t), \quad B_\phi(r, z, t) = B_\phi(r) \cos(kz - \omega t), \quad (2)$$

con $E_r(r)$ e $B_\phi(r)$ soluzioni di un problema *statico* (cioè con ℓ e I costanti e uniformi), e determinare la relazione tra ω e k .

2

Un'onda elettromagnetica monocromatica piana, di lunghezza d'onda λ , polarizzata ortogonalmente al piano del foglio, si propaga lungo l'asse x , sul quale si trovano due diffusori puntiformi identici posti a $x = \pm d/2$, il cui momento di dipolo è $\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{inc}}$, dove $\mathbf{E}_{\text{inc}}$ è il campo elettrico dell'onda incidente nella posizione del diffusore.



Si misura l'intensità I della radiazione diffusa su uno schermo parallelo all'asse x e alla polarizzazione e posto a distanza $L \gg d$, $L \gg \lambda$ dall'asse x , risultante dall'interferenza dei campi irraggiati dai diffusori.

a) Determinare la differenza di fase relativa tra i campi irraggiati dai due diffusori nel punto P dello schermo, in funzione dell'angolo θ in figura.

b) Si dia la dipendenza dell'intensità I nel punto P , in funzione di θ (non è necessario indicare le varie costanti moltiplicative).

c) Si discuta la forma di $I = I(\theta)$ al variare di kd , discutendo per quali valori di kd la funzione $I(\theta)$ ha un solo massimo e quindi non è possibile “distinguere” la presenza di due diffusori separati (ovvero la radiazione appare come emessa da un singolo diffusore).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Le domande asteriscate (*) **non** devono essere svolte da chi sostiene **solo la prova di Fisica B2**. Per queste domande **si tenga eventualmente conto del risultato**, senza doverlo dimostrare, per le domande successive.

Punteggio indicativo per **Fisica 2**: 1a) 4 1b) 4 1c) 6 1d) 4 1e) 6 2a) 4 1b) 4 1c) 4 .

Punteggio indicativo per **Fisica B2**: 1d) 6 1e) 12 2a) 4 2b) 4 2c) 4 .

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}).$$

Equazione di continuità

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Definizione di capacità C di un sistema di due conduttori; se sui conduttori si trova rispettivamente la carica $\pm Q$, detta V la differenza di potenziale fra i conduttori e U_e l'energia associata al campo elettrostatico generato, si ha

$$V = \frac{Q}{C}, \quad U_e = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}.$$

Definizione di induttanza L di un circuito: se in un circuito scorre la corrente I che genera il campo magnetico $\mathbf{B}$, detti $\Phi(\mathbf{B})$ il flusso concatenato di $\mathbf{B}$ e U_m l'energia associata a $\mathbf{B}$, si ha

$$\Phi(\mathbf{B}) = LI, \quad U_m = \frac{1}{2}LI^2.$$

Operatori in coordinate cilindriche ($\mathbf{A}$ e f generiche funzioni vettoriale e scalare)

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \partial_\phi A_z - \partial_x A_\phi \right) \hat{\mathbf{r}} + (\partial_z A_r - \partial_r A_z) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\phi) - \partial_\phi A_r) \hat{\mathbf{z}} \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \partial_r (r A_r) + \frac{1}{r} \partial_\phi A_\phi + \partial_z A_z, \quad \nabla^2 f = \frac{1}{r} \partial_r (r \partial_r f) + \frac{1}{r^2} \partial_\phi^2 f + \partial_z^2 f. \end{aligned}$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2}, \quad t_{\text{rit}} = t - r/c$$

Definizione d'intensità della radiazione elettromagnetica

$$I = |\mathbf{S}| = \varepsilon_0 c^2 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \varepsilon_0 c |\mathbf{E}|^2$$

SOLUZIONI

1

Supponiamo il cavo sufficientemente lungo da poter essere considerato approssimativamente infinito nella parte lontana dagli estremi, in cui calcoliamo le soluzioni. Abbiamo quindi a che fare con una simmetria cilindrica.

a) Per simmetria il campo elettrico deve essere radiale. Applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale col cavo, avente raggio r (con $a < r < b$) e altezza h otteniamo

$$2\pi r h E_r = \frac{\ell h}{\varepsilon_0}, \quad E_r = \frac{\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (3)$$

b) Per simmetria il campo magnetico deve essere azimutale. Dalla legge della circuitazione di Ampère applicata a una circonferenza di raggio r con centro sull'asse abbiamo

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I, \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (4)$$

c) La differenza di potenziale tra i conduttori è data da

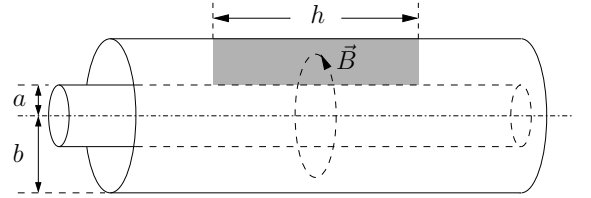
$$V = \int_a^b E_r dr = \frac{\ell}{2\pi\varepsilon_0} \log(b/a), \quad (5)$$

per cui

$$\mathcal{C} = \frac{1}{h} \frac{Q}{V} = \frac{\ell}{V} = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\log(b/a)}. \quad (6)$$

(Notare che la capacità è equivalente a quella di un condensatore cilindrico alto h e raggi interno ed esterno pari rispettivamente a a e b .)

Per calcolare l'induttanza per unità di lunghezza consideriamo il cavo percorso dalle correnti $\pm I$. Su di un semipiano limitato dall'asse del cavo consideriamo il rettangolo di base h e altezza $b - a$, con la base inferiore giacente sulla superficie del cilindro interno e la base superiore giacente sulla superficie del cilindro esterno, come in figura. Il flusso del campo magnetico attraverso questo rettangolo vale



$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^b \frac{\mu_0 I}{2\pi r} h dr = \frac{\mu_0 h I}{2\pi} \log(b/a), \quad L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 h}{2\pi} \log(b/a). \quad (7)$$

Per l'induttanza per unità di lunghezza abbiamo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{h} \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0}{2\pi} \log(b/a). \quad (8)$$

Allo stesso risultato si arriva calcolando l'energia magnetica per unità di lunghezza

$$u_m = \int_a^b \frac{B_\phi^2(r)}{2\mu_0} 2\pi r dr \doteq \frac{1}{2} \mathcal{L} I^2. \quad (9)$$

d) L'equazione di continuità, ovvero la legge di conservazione della carica elettrica, impone la relazione $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui

$$\partial_t \ell = \pm k I_0 \sin(kz - \omega t), \quad \ell = \pm \frac{k}{\omega} I_0 \cos(kz - \omega t). \quad (10)$$

e) I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ hanno la stessa struttura del caso statico, per cui, sfruttando la relazione tra I_0 e $\ell_0 = k I_0 / \omega$,

$$E_r = E_r(r, z, t) = \frac{\ell(z, t)}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r} \cos(kz - \omega t), \quad (11)$$

$$B_\phi = B_\phi(r, z, t) = \frac{\mu_0 I(z, t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos(kz - \omega t). \quad (12)$$

Questi campi soddisfano le leggi di Gauss e di Ampère-Maxwell, ovvero le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ e $(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$. Inoltre devono soddisfare la legge di Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, che si riduce a $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$, da cui

$$-k \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 r} \sin(kz - \omega t) = -\omega \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin(kz - \omega t) \quad (13)$$

da cui, eliminando i fattori comuni e ricordando che $\epsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$, si ottiene

$$k^2 c^2 = \omega^2. \quad (14)$$

Si può anche osservare che il cavo è una linea di trasmissione per cui la velocità di fase $\omega/k = (\mathcal{L}\mathcal{C})^{-1/2} = c$.

2

a) Il campo elettrico dell'onda incidente in corrispondenza di $x = \pm d/2$ è dato da

$$\mathbf{E}_i(x = \pm d/2, t) = E_0 e^{\pm i k d/2 - \omega t} \hat{\mathbf{y}}, \quad (15)$$

quindi i dipoli oscillano con sfasamento $k d$. Inoltre, la differenza tra le distanze fra ciascun diffusore e il punto P è data da

$$\Delta r = r_+ - r_- \simeq -d \sin \theta, \quad (16)$$

che corrisponde ad una differenza di cammino ottico $k \Delta r$. Quindi, sommando i due effetti,

$$\Delta \phi = k d (1 - \sin \theta). \quad (17)$$

b) Trascurando la differenza tra le ampiezze dei campi, l'intensità della radiazione in P è data a meno di costanti da

$$I(P) \sim |\mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-|^2 \sim |\mathbf{E}_+|^2 |e^{i k d (1 - \sin \theta)/2} + e^{-i k d (1 - \sin \theta)/2}|^2 \sim \frac{1}{r^2} \cos^2 \left(\frac{k d}{2} (1 - \sin \theta) \right). \quad (18)$$

Poiché $r \cos \theta = L$, si può scrivere

$$I(P) \sim (\cos^2 \theta) \cos^2 \left(\frac{k d}{2} (1 - \sin \theta) \right). \quad (19)$$

c) Sia $u = (kd/2)(1 - \sin \theta)$, per cui al variare di θ tra $-\pi/2$ e $+\pi/2$ il valore di u passa da kd a 0. Se $kd \ll 1$ ovvero $d \ll \lambda/2\pi$, $\cos^2 u \simeq 1$ e $I(\theta) \sim \cos^2 \theta$, come se fosse presente un solo diffusore. Se $kd < \pi/2$ la funzione $\cos^2 u$ non si annulla mai, ovvero non si osserva una modulazione dell'intensità dovuta all'interferenza se la distanza fra i diffusori è minore di un quarto di lunghezza d'onda. Se invece $\pi/2 < kd/2 < \pi(n + 1/2)$ con n intero e $n \geq 1$, la funzione $\cos^2 u$ si annulla n volte al variare di θ e si osservano n zeri e $n + 1$ massimi di intensità dovuti all'interferenza (l'intensità dei massimi è comunque modulata dalla funzione $\cos^2 \theta$).