

Corso di Laurea in Fisica

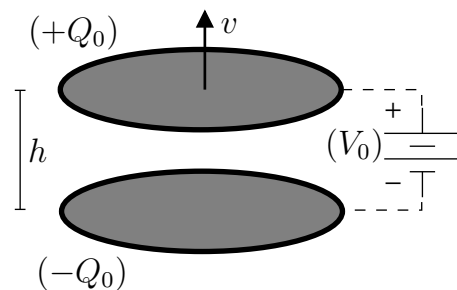
Anno Accademico 2011-2012

Compito di Fisica 2 (08/02/2013)

1

Un condensatore piano è formato da due armature metalliche parallele e circolari di superficie $S = \pi a^2$. Nel seguito gli effetti di bordo sono sempre assunti trascurabili ovvero le armature sono sempre a distanza $h \ll a$.

Mentre un'armatura viene tenuta ferma, l'altra viene allontanata a velocità costante v , in modo che sia $h(t) = h_0 + vt$. Considerando sia il caso in cui le armature sono elettricamente isolate e su di esse si trovano rispettivamente le cariche $\pm Q_0$, che il caso in cui tra le armature è mantenuta una differenza di potenziale costante V_0 , calcolare



- a) la forza necessaria a mantenere costante v ,
- b) la variazione dell'energia elettrostatica del condensatore in funzione del tempo,
- c) il campo magnetico generato tra le armature,
- d) il vettore di Poynting $\mathbf{S}$ tra le armature e il suo flusso su una superficie cilindrica di raggio a coassiale al condensatore.
- e) (*Facoltativo*) Nel caso della differenza di potenziale costante, confrontare il flusso del vettore di Poynting con la potenza "erogata" dal generatore.

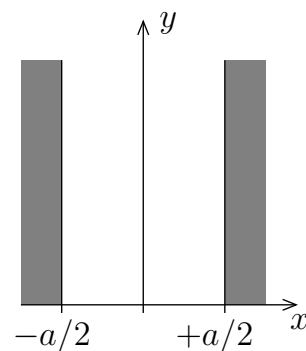
2

Nel sistema in figura, i semipiani $y > 0$, $x = \pm a/2$ sono perfettamente conduttori. Nella regione $|x| < a/2$, sul piano $y = 0$ è mantenuto il potenziale indipendente dal tempo

$$\Phi(x, 0) = V_0 \cos(\pi x/a) . \quad (1)$$

a) Calcolare il potenziale nella regione $|x| < a/2$, $y > 0$ (suggerimento: assumere un potenziale $\Phi(x, y) = \Phi_0 \cos(kx)e^{ay}$ e determinare i parametri Φ_0 , k e q).

b) Assumendo adesso che per $|x| < a/2$, $y = 0$ si abbia un potenziale dipendente dal tempo



$$\Phi(x, 0, t) = V_0 \cos(\pi x/a) e^{-i\omega t} , \quad (2)$$

determinare il potenziale nella regione $|x| < a/2$, $y > 0$, discutendo come la sua espressione dipende da ω .

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Equazione d'onda per il potenziale scalare Φ nel vuoto

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) \Phi = 0. \quad (5)$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)) . \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

La capacità del condensatore C vale

$$C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h_0 + vt}. \quad (7)$$

In ogni caso abbiamo una simmetria cilindrica per rotazioni attorno all'asse del condensatore, che possiamo prendere come asse z . Nelle nostre approssimazioni il campo elettrico è uniforme e diretto lungo z tra le armature, trascurabile altrove. Nel caso del condensatore isolato con carica costante $\pm Q_0$ sulle due armature la differenza di potenziale tra le armature ed il campo elettrico all'interno del condensatore valgono rispettivamente

$$V = \frac{Q_0}{C} = Q_0 \frac{h_0 + vt}{\varepsilon_0 \pi a^2} \quad \text{e} \quad E = \frac{V}{h} = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \pi a^2}. \quad (8)$$

Nel caso del condensatore mantenuto a differenza di potenziale costante V_0 la carica e il campo elettrico valgono rispettivamente

$$Q = CV_0 = V_0 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h_0 + vt} \quad \text{e} \quad E = \frac{V_0}{h_0 + vt}. \quad (9)$$

a) In ogni caso la forza su un'armatura vale $F = \frac{1}{2}QE$ (il campo esiste solo nello spazio tra le armature!), quindi nel caso della carica costante abbiamo la forza costante

$$F = \frac{Q_0^2}{2\varepsilon_0 \pi a^2} \quad (10)$$

mentre nel caso della differenza di potenziale costante abbiamo

$$F = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2(h_0 + vt)^2}. \quad (11)$$

b) L'energia elettrostatica di un condensatore vale

$$U = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} CV^2, \quad (12)$$

quindi a carica costante abbiamo

$$U = Q_0^2 \frac{h_0 + vt}{2\varepsilon_0 \pi a^2} \quad (13)$$

e a differenza di potenziale costante

$$U = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2(h_0 + vt)}. \quad (14)$$

c) Nel caso della carica costante il campo elettrico tra le armature non varia nel tempo, non ci sono correnti elettriche, e non viene generato campo magnetico. Nel caso del potenziale costante, possiamo sfruttare la simmetria cilindrica del problema e calcolare la circuitazione di $\vec{B}$ lungo una circonferenza di raggio r coassiale con il sistema e compresa tra le due armature. Non avendo correnti concatenate, la quarta equazione di Maxwell in forma integrale si scrive

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S}, \quad (15)$$

da cui

$$2\pi r B = -\frac{\pi r^2}{c^2} \frac{V_0 v}{(h_0 + vt)^2} \quad \text{ovvero} \quad B = -\frac{r}{2c^2} \frac{V_0 v}{(h_0 + vt)^2}. \quad (16)$$

Per simmetria $\vec{B}$ ha solo la componente azimutale. Il segno meno della (16) ci dice che, se prendiamo l'asse z concorde con $\vec{E}$, cioè diretto dall'armatura positiva a quella negativa, le linee di forza di $\vec{B}$ sono in senso orario. D'altra parte $\partial E_z / \partial t$ è negativo, quindi è negativo $(\vec{\nabla} \times \vec{B})_z$, e abbiamo quindi

$$0 > (\vec{\nabla} \times \vec{B})_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r B_\varphi) - \frac{\partial B_r}{\partial \varphi} \right] = \frac{2B_\varphi}{r}, \quad (17)$$

e la componente B_φ è negativa.

d) Nel caso della carica costante tra le armature non c'è campo magnetico, quindi il vettore di Poynting è nullo. Nel caso della differenza di potenziale costante tra le armature abbiamo sia il campo elettrico uniforme lungo z dato dalla seconda delle (9) che il campo magnetico azimutale dato dalla (16). Essendo $\vec{E}$ diretto come $\hat{z}$ e $\vec{B}$ come $-\hat{\varphi}$, abbiamo che $\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$ è diretto come $\hat{r}$ e ha modulo

$$S = S_r = -\varepsilon_0 c^2 E_z B_\varphi = \frac{\varepsilon_0 V_0^2 v r}{2(h_0 + vt)^3}. \quad (18)$$

Se consideriamo il flusso di $\vec{S}$ attraverso una superficie laterale cilindrica di raggio a che racchiude il condensatore, abbiamo

$$\Phi_S = 2\pi a (h_0 + vt) \frac{\varepsilon_0 V_0^2 v a}{2(h_0 + vt)^3} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v}{(h_0 + vt)^2}. \quad (19)$$

e) Nel caso delle armature mantenute a potenziale costante la carica del condensatore diminuisce secondo la prima delle (9). Abbiamo quindi una corrente

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0 v}{(h_0 + vt)^2} \quad (20)$$

dove il segno meno indica che il generatore non carica il condensatore, ma è il condensatore a scaricarsi sul generatore. Quindi il generatore non eroga, ma assorbe potenza. La potenza *assorbita* dal generatore vale

$$W_{\text{ass}} = -V_0 I = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v}{(h_0 + vt)^2} \quad (21)$$

pari al flusso Φ_S della (19). Si può anche notare che W_{ass} , e quindi Φ_S , sono uguali alla somma della potenza meccanica Fv e della diminuzione di energia elettrostatica per unità di tempo $-\partial U / \partial t$, dove F è data dalla (11), e U è data dalla (14).

2

a) Sulle pareti conduttrici, il potenziale è costante. All'infinito poniamo $\Phi(\infty) = 0$. Per continuità il potenziale si annulla anche sulle pareti conduttrici e ciò in accordo con la (1) per $x = \pm a/2$.

Dobbiamo quindi risolvere un problema elettrostatico per il potenziale, $\Delta \Phi(x, y) = 0$, con le condizioni al bordo seguenti:

$$\Phi(x, 0) = V_0 \cos(\pi x/a), \quad \Phi(\pm a/2, y) = \Phi(x, y \rightarrow \infty) = 0. \quad (22)$$

Cerchiamo la soluzione nella forma proposta (più in generale a variabili separabili):

$$\Phi(x, y) = \Phi_0 \cos(kx) e^{qy} . \quad (23)$$

Sostituendo nell'equazione $\Delta\Phi(x, y) = 0$, otteniamo: $q^2 - k^2 = 0$. Per soddisfare le condizioni al bordo (22), deve risultare

$$k = \frac{\pi}{a} , \quad q = -\frac{\pi}{a} , \quad \Phi_0 = V_0 , \quad (24)$$

e quindi la soluzione del problema (unica per il teorema di unicità) è

$$\Phi(x, y) = V_0 \cos(\pi x/a) e^{-\pi y/a} . \quad (25)$$

Con un potenziale simile, il campo elettrico $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ è diretto lungo $\hat{\mathbf{x}}$ in corrispondenza delle pareti conduttrici, come atteso.

b) Nel caso in cui si considera anche la dipendenza temporale, il potenziale scalare soddisfa l'equazione d'onda

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Phi(x, y, t) = 0 . \quad (26)$$

Ricordando il punto precedente possiamo cercare il potenziale nella forma

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0 \cos(kx) e^{qy} e^{-i\omega t} . \quad (27)$$

Dalla condizione al bordo (22) otteniamo ancora $k = \pi/a$ e $\Phi_0 = V_0$. Sostituendo la precedente nella (26), otteniamo

$$q^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + k^2 = -\frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\pi^2}{a^2} . \quad (28)$$

Per $\omega > \pi c/a \equiv \omega_c$, si ha $q = i(\omega^2 - \omega_c^2)^{1/2}$ e la soluzione è

$$\Phi(x, y, t) = V_0 \cos(\pi x/a) e^{|q|y} e^{-i\omega t} , \quad |q| = \sqrt{\omega^2 - \omega_c^2} . \quad (29)$$

Se poniamo, come al punto precedente, che il potenziale vada a zero all'infinito, allora esiste una frequenza di taglio, pari a $\omega_c = \pi c/a$, e risulta

$$\Phi(x, y, t) = V_0 \cos(\pi x/a) e^{-|q|y} e^{-i\omega t} , \quad |q| = \sqrt{\omega_c^2 - \omega^2} . \quad (30)$$

In entrambi i casi, sulle pareti conduttrici il gradiente del potenziale è diretto perpendicolarmente alle pareti stesse.

Notare che in generale la soluzione completa per il campo elettromagnetico richiede anche il calcolo del potenziale vettore, la cui sorgente è la densità di corrente sul piano $y = 0$. Infatti, la condizione al bordo per il potenziale scalare implica che a $y = 0$ si trovi una densità di carica superficiale dipendente da x , che nel caso dipendente dal tempo implica la presenza di una densità di corrente.