

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

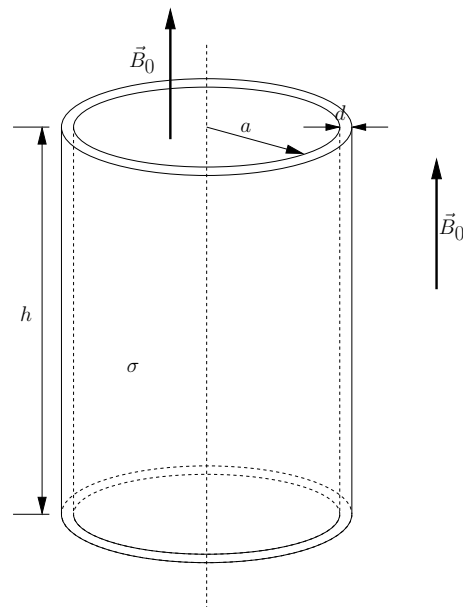
Compito di Fisica 2 (04/02/2015)

1

Una lamina metallica di forma cilindrica ha altezza h , raggio $a \ll h$, spessore $d \ll a$ e conducibilità σ . La lamina si trova immersa in un campo magnetico esterno $\mathbf{B}_0(t)$ parallelo all'asse del cilindro. Per $t > 0$ il campo esterno varia nel tempo secondo la legge $\mathbf{B}_0(t) = \mathbf{B}_0 e^{-t/\tau}$.

Calcolare, nell'approssimazione di correnti lentamente variabili

- a) il campo elettrico indotto $\mathbf{E}$ e la densità di corrente $\mathbf{J}$ nella lamina,
- b) la potenza dissipata per effetto Joule nella lamina,
- c) la pressione sulla lamina dovuta al campo magnetico $\mathbf{B}_0$, specificando la direzione delle forze di pressione (ovvero se la lamina tende a dilatarsi o a contrarsi),
- d) il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ indotto all'interno della lamina dalla densità di corrente $\mathbf{J}$, discutendo per quali valori del tempo caratteristico τ il campo magnetico indotto è trascurabile rispetto al campo esterno $\mathbf{B}_0$.



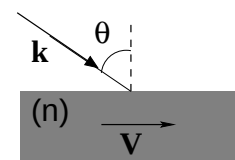
2

Un'onda elettromagnetica piana di frequenza ω_0 incide a un angolo θ rispetto alla normale sulla superficie piana di un fluido che scorre con velocità $\mathbf{V}$ parallela alla superficie nel sistema del laboratorio S . Il mezzo fluido ha indice di rifrazione n definito *nel sistema S' in cui il fluido è in quiete* e indipendente dalla frequenza. L'onda è polarizzata nel piano d'incidenza.

Calcolare, nel sistema del laboratorio S ,

- a) l'angolo di propagazione e la frequenza delle onda riflessa e rifratta,
- b) l'angolo per cui *non* si ha onda riflessa al primo ordine in $\beta \ll 1$.

Si diano le risposte **a)** e **b)** sia per un qualunque valore di $\beta = V/c < 1$ (eventualmente in forma implicita) sia in approssimazione al primo ordine in $\beta \ll 1$, specificando l'ordine di eventuali correzioni alle note leggi della riflessione e della rifrazione per un mezzo in quiete.



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} , \quad (2)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\boldsymbol{\ell} = Id\boldsymbol{\ell}$.

Legge di Ohm (ρ resistività, σ conducibilità)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \mathbf{E}/\rho . \quad (3)$$

Campo magnetico interno ad un solenoide infinito

$$B = \mu_0 j_s = \mu_0 n I \quad (4)$$

($j_s = nI$ corrente superficiale, n numero di spire per unità di lunghezza).

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (5)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Relazione di dispersione in un mezzo caratterizzato dall'indice di rifrazione $n(\omega)$ (con $n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega)$)

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = n^2(\omega) . \quad (6)$$

Legge di Snell della rifrazione

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \quad (7)$$

dove θ_i e θ_t sono gli angoli formati dai vettori d'onda dell'onda incidente e trasmessa con la perpendicolare alla superficie.

SOLUZIONI

1

a) Secondo le equazioni di Maxwell, la presenza del campo magnetico t -dipendente induce un campo elettrico $\mathbf{E}$ che, data la simmetria del problema, ha solo componente azimutale e dipende da t e da r , distanza dall'asse del cilindro: $\mathbf{E} = E_\phi(r, t)\hat{\phi}$. Per determinarne il modulo, applichiamo la legge di Faraday-Neumann e integriamo su un percorso circolare nel piano perpendicolare alla direzione del campo magnetico, di raggio r e centro sull'asse del cilindro

$$2\pi r E_\phi(r, t) = -\pi r^2 \left(-\frac{1}{\tau} \right) B_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow E_\phi(r, t) = \frac{B_0}{2\tau} r e^{-t/\tau} . \quad (8)$$

La densità di corrente si ricava dalla legge di Ohm. Nella lamina ($r = a$) avremo dunque

$$\mathbf{E} = \frac{aB_0}{2\tau} e^{-t/\tau} \hat{\phi} , \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = \sigma \frac{aB_0}{2\tau} e^{-t/\tau} \hat{\phi} . \quad (9)$$

b) La potenza dissipata per unità di volume vale

$$\mathcal{W} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \sigma \frac{a^2 B_0^2}{4\tau^2} e^{-2t/\tau} , \quad (10)$$

che integrata sul volume di metallo $2\pi a h \delta$ percorso dalla corrente dà

$$W = \sigma \frac{B_0^2}{2\tau^2} \pi a^3 h \delta e^{-2t/\tau} . \quad (11)$$

c) Consideriamo un elemento infinitesimale di lamina, di area dS e spessore δ . Dall'espressione della forza di Lorentz, il campo magnetico genera sull'elemento una forza per unità di volume pari a $\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$, diretta verso l'esterno. Per il volume della lamina $dV = dS \delta$ abbiamo

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0 dS \delta \quad (12)$$

da cui ricaviamo il valore della pressione su quell'elemento

$$p = \frac{df}{dS} = |\mathbf{J} \times \mathbf{B}_0| \delta = \sigma \frac{B_0^2}{2\tau} a \delta e^{-2t/\tau} . \quad (13)$$

Le forze di pressione dovute al campo magnetico sono rivolte verso l'esterno e inducono la lamina a dilatarsi per compensare la diminuzione di flusso magnetico.

d) La lamina percorsa da una densità di corrente $\mathbf{J}$ è equivalente ad un solenoide con $nI = J\delta$, quindi

$$\mathbf{B}_1 = \mu_0 J \delta \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 \sigma \frac{B_0}{2\tau} \delta a e^{-t/\tau} \hat{\mathbf{z}} . \quad (14)$$

Perché si possa trascurare $\mathbf{B}_1$ rispetto al campo esterno, deve risultare:

$$B_1 \ll B_0 \Leftrightarrow \mu_0 \sigma \frac{\delta a}{2\tau} \ll 1 \Leftrightarrow \tau \gg \frac{\mu_0 \sigma \delta a}{2} . \quad (15)$$

2

a) Analizziamo il problema nel piano xy di riflessione (contenente la normale alla superficie del liquido e la direzione del raggio incidente): $\hat{\mathbf{x}}$ e $\hat{\mathbf{y}}$ sono rispettivamente parallelo e perpendicolare alla superficie del liquido. Nel sistema S' dove il mezzo è in quiete la frequenza dell'onda incidente (i) è

$$\omega'_i = \gamma(\omega_0 - k_{ix}V) = \gamma\omega_0(1 - \beta \sin \theta) = \omega_0(1 - \beta \sin \theta) + \mathcal{O}(\beta^2) , \quad (16)$$

essendo $|\mathbf{k}_i| = \omega_0/c$ e $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{z}}$. Per le componenti del vettore d'onda parallela e perpendicolare alla superficie abbiamo rispettivamente

$$k'_{ix} = \gamma(k_{ix} - \omega_0 V/c^2) = \gamma(\omega_0/c)(\sin \theta - \beta) = (\omega_0/c)(\sin \theta - \beta) + \mathcal{O}(\beta^2) , \quad (17)$$

$$k'_{iy} = k_{iy} = (\omega_0/c) \cos \theta . \quad (18)$$

Il modulo quadro del vettore d'onda incidente nel riferimento S' è allora

$$(k'_i)^2 = (k'_{ix})^2 + (k'_{iy})^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} [\gamma^2(\sin \theta - \beta)^2 + \cos^2 \theta] \quad (19)$$

$$= \frac{\omega_0^2}{c^2} (1 - 2\beta \sin \theta) + \mathcal{O}(\beta^2) = \frac{\omega_0'^2}{c^2} + \mathcal{O}(\beta^2) . \quad (20)$$

Per l'onda riflessa (r), le leggi della riflessione in S' danno

$$\omega'_r = \omega'_i , \quad k'_{rx} = k'_{ix} , \quad k'_{ry} = -k'_{iy} . \quad (21)$$

Antitrasformando da S' a S otteniamo la frequenza dell'onda riflessa nel laboratorio

$$\omega_r = \gamma(\omega'_r + k'_{rx}V) = \gamma^2\omega_0(1 - \beta \sin \theta + \beta \sin \theta - \beta^2) = \gamma^2\omega_0(1 - \beta^2) = \omega_0 \quad (22)$$

e le componenti del vettore d'onda

$$\begin{aligned} k_{rx} &= \gamma(k'_{rx} + \omega'_r V/c^2) = \gamma^2(\omega_0/c)(\sin \theta - \beta + \beta - \beta^2 \sin \theta) \\ &= \gamma^2(\omega_0/c) \sin \theta (1 - \beta^2) = (\omega_0/c) \sin \theta , \end{aligned} \quad (23)$$

$$k_{ry} = k'_{ry} = -(\omega_0/c) \cos \theta , \quad (24)$$

per cui l'angolo di riflessione è

$$\tan \theta_r = k_{rx}/k_{ry} = \tan \theta . \quad (25)$$

Perciò la frequenza riflessa e l'angolo di riflessione non cambiano per effetto del moto del fluido.

Nel riferimento S' le leggi della rifrazione danno per l'onda trasmessa

$$\omega'_t = \omega'_i , \quad k'_{tx} = k'_{ix} , \quad k'_t \equiv \sqrt{(k'_{tx})^2 + (k'_{ty})^2} = k'_i n , \quad (26)$$

da cui si ottiene la legge di Snell: $n \sin \theta'_t = \sin \theta'$. Antitrasformando da S' a S otteniamo la frequenza dell'onda trasmessa nel laboratorio

$$\omega_t = \gamma(\omega'_t + k'_{tx}V) = \gamma^2\omega_0(1 - \beta \sin \theta + \beta \sin \theta - \beta^2) = \gamma^2\omega_0(1 - \beta^2) = \omega_0 \quad (27)$$

e le componenti del vettore d'onda

$$\begin{aligned} k_{tx} &= \gamma(k'_{tx} + \omega'_t V/c^2) = \gamma^2(\omega_0/c)(\sin \theta - \beta + \beta - \beta^2 \sin \theta) \\ &= \gamma^2(\omega_0/c) \sin \theta (1 - \beta^2) = (\omega_0/c) \sin \theta , \end{aligned} \quad (28)$$

$$k_{ty} = k'_{ty} , \quad (29)$$

Per la frequenza dell'onda trasmessa non si hanno correzioni. Ricaviamo k_{ty} in funzione di ω_0 , β e $\mathbf{n}$:

$$(k_{ty})^2 = (k'_{ty})^2 = (k_t)^2 - (k'_{tx})^2 = (k'_i)^2 \mathbf{n}^2 - (k'_{tx})^2 . \quad (30)$$

Utilizzando le equazioni (17), (19) e (26) si ottiene

$$(k_{ty})^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} [\gamma^2 (\sin \theta - \beta)^2 + \cos^2 \theta] \mathbf{n}^2 - \frac{\omega_0^2}{c^2} (\sin \theta - \beta)^2 . \quad (31)$$

L'angolo di rifrazione nel riferimento del laboratorio è dato da: $\tan \theta_t = k_{tx}/k_{ty}$, dove le due componenti del vettore d'onda trasmesso sono determinate dalle equazioni (28) e (31). Al primo ordine in β , $\gamma \simeq 1$ e otteniamo dalla (31)

$$k_{ty} \simeq \frac{\omega_0}{c} [\mathbf{n}^2 - \sin^2 \theta - 2\beta \sin \theta (\mathbf{n}^2 - 1)]^{1/2} . \quad (32)$$

Ponendo $\beta = 0$ nella precedente si ottiene il valore di k_{ty} per $V = 0$. Per l'angolo di rifrazione avremo al primo ordine in β

$$\begin{aligned} \tan \theta_t = k_{tx}/k_{ty} &\simeq \frac{\sin \theta}{[\mathbf{n}^2 - \sin^2 \theta - 2\beta \sin \theta (\mathbf{n}^2 - 1)]^{1/2}} \\ &\simeq \tan \theta_t|_{(V=0)} \left[1 + \beta \frac{\sin \theta (\mathbf{n}^2 - 1)}{\mathbf{n}^2 - \sin^2 \theta} \right] . \end{aligned} \quad (33)$$

dove $\tan \theta_t|_{(V=0)}$ è l'angolo di rifrazione nel riferimento del laboratorio se il mezzo è in quiete. Per un mezzo in moto abbiamo quindi una correzione di ordine $\mathcal{O}(\beta)$ al valore dell'angolo di rifrazione.

b) L'angolo cercato corrisponde all'angolo di Brewster θ_B nel sistema S' in cui il fluido è in quiete. Detto θ'_i l'angolo di incidenza in S' , si ha com'è noto

$$\tan \theta'_i = \mathbf{n} . \quad (34)$$

D'altronde $\tan \theta'_i = k'_{ix}/k'_{iy}$ per cui

$$\frac{\gamma(\sin \theta - \beta)}{\cos \theta} = \mathbf{n} , \quad (35)$$

da cui si può ricavare θ . Al primo ordine in β , $\gamma \simeq 1$ e elevando al quadrato ambo i membri si ricava

$$\sin \theta \simeq \frac{\mathbf{n}}{\sqrt{1 + \mathbf{n}^2}} + \frac{\beta}{1 + \mathbf{n}^2} + \mathcal{O}(\beta^2) . \quad (36)$$