

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (04/02/2016)

1

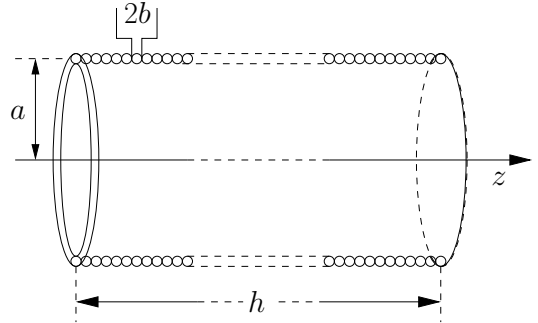
Un solenoide avente lunghezza h e raggio $a \ll h$ è costruito con un singolo avvolgimento di filo metallico avente raggio della sezione $b \ll a$ e resistività ρ . Spire successive sono a contatto (non elettrico!), come in figura.

a) Calcolare la resistenza R e l'autoinduttanza L del solenoide, e il loro rapporto L/R , determinandone le dimensioni.

Se il solenoide è posto in un campo magnetico *esterno* uniforme $\mathbf{B}_{\text{ext}} = \text{Re}(B_0 \hat{\mathbf{z}} e^{-i\omega t})$ parallelo all'asse del solenoide, calcolare

b) il campo magnetico *totale* $\mathbf{B}_{\text{tot}}$ all'interno del solenoide,

c) la potenza media dissipata per effetto Joule.



2

Si consideri un elettrone vincolato a muoversi nel piano yz sotto l'effetto di un campo di forze elastiche anisotropo,

$$f_y = -m_e \omega_1^2 y, \quad f_z = -m_e \omega_2^2 z, \quad (1)$$

e del campo di un'onda monocromatica piana di frequenza ω , ampiezza del campo elettrico E_0 , e polarizzazione lineare orientata lungo la bisettrice del piano yz :

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{z}}) \cos(kx - \omega t). \quad (2)$$

(Gli effetti del termine magnetico della forza di Lorentz e di eventuali termini di attrito sono trascurabili.)

a) Risolvere l'equazione del moto dell'elettrone a regime.

b) Studiare la potenza irradiata considerando il solo termine di dipolo elettrico, determinando la frequenza emessa, la potenza totale, e la direzione in cui non si ha emissione di radiazione.

Si assuma adesso che siano presenti n elettroni del tipo sopra specificato per unità di volume.

c) Si scriva la relazione di dispersione per onde polarizzate lungo y e lungo z , rispettivamente.

d) Si discuta la propagazione dell'onda polarizzata lungo la bisettrice (2) in funzione della frequenza (si assuma $\omega_1 < \omega_2 < \omega_p$, dove $\omega_p = \sqrt{ne^2/(\epsilon_0 m_e)}$).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} e^{-i\omega t_{\text{rit}}} \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (5)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Poiché il diametro del filo di una spira è $2b$, il numero di spire per unità di lunghezza è

$$n = \frac{1}{2b}, \quad \text{con numero totale delle spire} \quad N = nh = \frac{h}{2b}, \quad (7)$$

quindi la lunghezza complessiva del filo è

$$\ell_f \simeq 2\pi a N = 2\pi a \frac{h}{2b} = \pi \frac{ah}{b}, \quad \text{con resistenza} \quad R = \rho \frac{\ell_f}{\pi b^2} = \rho \frac{ah}{b^3}. \quad (8)$$

L'induttanza è data dal flusso del campo generato dal solenoide quando circola una corrente I , $\mathbf{B}_{\text{sol}} = \mu_0 n I \hat{\mathbf{z}}$, diviso per I

$$L \equiv \frac{\Phi_{\text{sol}}}{I} = \frac{N \pi a^2 \mathbf{B}_{\text{sol}}}{I} = \frac{h}{2b} \pi a^2 \mu_0 \frac{1}{2b} = \mu_0 \pi h \left(\frac{a}{2b} \right)^2 \quad (9)$$

per cui il rapporto L/R vale

$$\frac{L}{R} = \frac{\pi}{4} \mu_0 \frac{ab}{\rho} = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{ab}{\rho} = \frac{\pi}{4} \frac{ab}{c^2 \tau}, \quad (10)$$

essendo $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$, e avendo posto $\tau = \varepsilon_0 \rho$, che ha le dimensioni di un tempo.

b) La forza elettromotrice del solenoide è

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{tot}}}{dt} = -N \pi a^2 \frac{dB_{\text{tot}}}{dt} = -N \pi a^2 \frac{dB_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{dI}{dt} = -\frac{\pi a^2 h}{2b} \frac{dB_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{dI}{dt}, \quad (11)$$

quindi l'equazione per la corrente che circola nel solenoide è

$$RI = -\pi a^2 \frac{h}{2b} \frac{dB_{\text{ext}}}{dt} - L \frac{dI}{dt}. \quad (12)$$

Ponendo $I = \text{Re}(I_0 e^{-i\omega t})$ abbiamo, per l'equazione complessa,

$$RI_0 e^{-i\omega t} = i\omega \frac{\pi a^2 h}{2b} B_0 e^{-i\omega t} + i\omega L I_0 e^{-i\omega t} \quad (13)$$

da cui

$$I_0 = \frac{i\omega \pi a^2 h B_0}{2b(R - i\omega L)} = \frac{i\omega \pi a^2 h B_0}{2bR(1 - i\omega L/R)}, \quad \text{da cui} \quad I = \frac{\omega \pi a^2 h B_0}{2b(R^2 + \omega^2 L^2)} (R \sin \omega t - \omega L \cos \omega t). \quad (14)$$

Il campo totale è la somma del campo esterno e del campo generato dal solenoide al suo interno

$$B_{\text{tot}} = B_{\text{ext}} + B_{\text{sol}} = B_{\text{ext}} + \mu_0 n I. \quad (15)$$

c) La potenza media dissipata per effetto Joule è

$$P_{\text{dis}} = \frac{R |I_0|^2}{2}. \quad (16)$$

2

a) Considerando che l'elettrone si muova nel piano $x = 0$ (non essendoci componenti della forza ortogonali a tale piano), le equazioni del moto lungo y e z sono

$$m_e \ddot{y} = -m_e \omega_1^2 y - e \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t \quad \text{e} \quad m_e \ddot{z} = -m_e \omega_1^2 z - e \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos \omega t, \quad (17)$$

dove m_e ed $-e$ sono la massa e la carica dell'elettrone. Ponendo

$$y = y_0 \cos \omega t \quad \text{e} \quad z = z_0 \cos \omega t \quad (18)$$

abbiamo come soluzioni

$$y_0 = \frac{e}{m_e(\omega^2 - \omega_1^2)} \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \quad z_0 = \frac{e}{m_e(\omega^2 - \omega_2^2)} \frac{E_0}{\sqrt{2}}, \quad (19)$$

che corrispondono a un'oscillazione lineare nel piano yz lungo una retta che forma un angolo

$$\vartheta = \arctan \left(\frac{\omega^2 - \omega_2^2}{\omega^2 - \omega_1^2} \right). \quad (20)$$

con l'asse y .

b) La potenza irradiata è nulla lungo la direzione parallela al dipolo (direzione ϑ), mentre la potenza totale *media* irradiata, di frequenza ω , è

$$\overline{P} = \frac{e^4 E_0^2 \omega^4}{6\pi \varepsilon_0 c^3 m_e^2} \left(\frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2} + \frac{1}{(\omega^2 - \omega_2^2)^2} \right). \quad (21)$$

c) Se abbiamo n elettroni legati elasticamente per unità di volume, e inviamo un'onda del tipo $E_y = E_0 \cos \omega t$ polarizzata lungo l'asse y , avremo una polarizzazione

$$P_y = -ney(t) = -\frac{ne^2}{m_e(\omega^2 - \omega_1^2)} E_y, \quad (22)$$

per cui dalla relazione $P_y = \varepsilon_0(\varepsilon_y - 1)E_y$ abbiamo

$$\varepsilon_y = 1 - \frac{ne^2}{\varepsilon_0 m_e(\omega^2 - \omega_1^2)} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_1^2}, \quad (23)$$

dove $\omega_p = \sqrt{ne^2/(\varepsilon_0 m_e)}$ è la frequenza di plasma, ed ε_y è la permittività elettrica relativa per un campo parallelo all'asse y . Trattando analogamente un'onda polarizzata lungo l'asse z abbiamo

$$\varepsilon_z = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_2^2}. \quad (24)$$

Nel caso di un mezzo con $\mu_r = 1$ l'indice di rifrazione è $n = \sqrt{\varepsilon_r}$ (da non confondere con la densità degli elettroni n !), quindi

$$n_{y,z}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_{1,2}^2}. \quad (25)$$

d) L'onda si può scomporre in due polarizzazioni ortogonali che non possono propagarsi rispettivamente per $\omega_1 < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_1^2}$ e per $\omega_2 < \omega < \sqrt{\omega_p^2 + \omega_2^2}$. Quindi se $\omega_1 < \omega < \omega_2$ il mezzo funziona da polarizzatore.