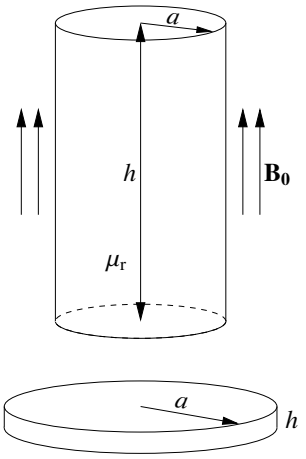
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (06/02/2017)

1



Si consideri il problema di un cilindro di materiale avente permeabilità magnetica relativa μ_r posto in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}_0$ parallelo all'asse del cilindro come in figura, e l'analogo problema di un cilindro con permittività relativa ε_r posto in un campo elettrico $\mathbf{E}_0$. In entrambi i casi il cilindro ha raggio a ed altezza h.
a) Nel caso di cilindro "lungo" ($a \ll h$), calcolare rispettivamente il campo magnetico ($\mathbf{B}_i$) ed elettrico ($\mathbf{E}_i$) all'interno del cilindro, trascurando gli effetti di bordo.
b) Calcolare i campi come in **a)** per un cilindro "schiacciato" ($a \gg h$).
c) Si migliori la risposta **a)** per i campi al centro del cilindro, tenendo conto degli effetti di bordo all'ordine più basso (non nullo) in $a/h \ll 1$.
d) Si migliori la risposta **b)** procedendo come in **c)** nel limite $h/a \ll 1$.

2

Due onde piane (onda 1 e onda 2) monocromatiche di egual frequenza ω ed ampiezza E_0 si propagano rispettivamente lungo l'asse x e l'asse y. All'origine degli assi i campi hanno uno sfasamento φ. Le onde mettono in oscillazione una carica libera q di massa m posta all'origine ed altrimenti ferma (si consideri il moto come non relativistico e si trascuri il termine magnetico nella forza di Lorentz).

Si consideri dapprima il caso in cui le onde sono entrambi polarizzate nel piano xy.
a) Scrivere l'espressione dei campi elettrici delle due onde e calcolare il moto della carica al variare della fase relativa φ tra le due onde calcolata all'origine degli assi, considerando in particolare i casi $\varphi = 0, \pi/2, \pi$.
b) Calcolare la polarizzazione della radiazione diffusa dalla carica rispettivamente lungo gli assi x, y e z, e la potenza totale diffusa per i casi $\varphi = 0, \pi/2, \pi$ (confrontando con la potenza diffusa in presenza di una sola onda).
c) Si risponda nuovamente alle domande **a)-b)** nel caso in cui la polarizzazione di entrambe le onde sia lungo z.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{1}$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F}=q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\ . \tag{2}$$

Equazioni dell'elettrostatica di mezzi con densità di polarizzazione elettrica $\mathbf{P}$ in assenza di cariche "libere"

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=0\ ,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P})=\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}=0,\qquad \mathbf{D}\equiv\varepsilon_0\mathbf{E}+\mathbf{P}\ ,\qquad \rho_{\rm P}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}\ . \tag{3}$$

Definizione di suscettività (χ) e permittività ($\varepsilon=\varepsilon_r\varepsilon_0$) dielettriche per mezzi lineari

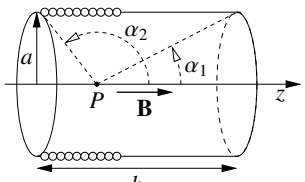
$$\mathbf{D}=\varepsilon_0(1+\chi)\mathbf{E}=\varepsilon\mathbf{E}\ . \tag{4}$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti "libere"

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0\ ,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0}-\mathbf{M}\right)=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}=0\ ,\qquad \mathbf{B}\equiv\mu_0(\mathbf{H}+\mathbf{M})\ ,\qquad \mathbf{J}_M=\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{M}\ . \tag{5}$$

Definizione di suscettività (χ_m) e permittività ($\mu=\mu_r\mu_0$) magnetiche per mezzi lineari

$$\mathbf{B}=\mu_0(1+\chi_m)\mathbf{H}=\mu\mathbf{H}\ . \tag{6}$$



Campo sull'asse di un solenoide finito orientato lungo l'asse z, avente n spire per unità di lunghezza nelle quali scorre l'intensità di corrente I

$$\mathbf{B}_{\rm asse}=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\right)\ . \tag{7}$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e=k_0\frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\rm rit})\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}}{rc^2}{\rm e}^{-i\omega t_{\rm rit}} \tag{8}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2\ \ , \tag{9}$$

SOLUZIONI

1

a) Nel caso "magnetico" la condizione di raccordo alla superficie laterale del cilindro impone la continuità della componente parallela di $\mathbf{H} = \mathbf{B}/(\mu_0\mu_\mathrm{r})$. Abbiamo quindi per il campo interno

$$\frac{\mathbf{B}_\mathrm{i}}{\mu_\mathrm{r}} = \mathbf{B}_0;, \quad \text{da cui} \quad \mathbf{B}_\mathrm{i} = \mu_\mathrm{r}\mathbf{B}_0 \; . \tag{10}$$

Nel caso "elettrico" la condizione di raccordo alla superficie laterale del cilindro è la continuità della componente parallela di $\mathbf{E}$, quindi abbiamo

$$\mathbf{E}_\mathrm{i} = \mathbf{E}_0 \; . \tag{11}$$

b) Nel caso "magnetico" la continuità della componente perpendicolare del campo sulla superficie di base fornisce immediatamente

$$\mathbf{B}_\mathrm{i} = \mathbf{B}_0 \; . \tag{12}$$

Nel caso "elettrico" si ha invece la continuità di $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, che fornisce

$$\mathbf{E}_\mathrm{i} = \frac{1}{\varepsilon_r}\mathbf{E}_0 \; . \tag{13}$$

c) Nel caso del cilindro "lungo" dielettrico in campo elettrico, prendendo come valida all'ordine zero la soluzione del punto **b)**, abbiamo una polarizzazione del materiale $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}_0$. A questa corrispondono densità di carica $\sigma = \mathbf{P}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \pm P$ alle due basi del cilindro. Data la condizione $a \ll h$, al centro le due basi possono essere approssimate come due cariche puntiformi $Q = \sigma\pi a^2 = \pm\pi a^2 P = \pm\pi a^2\varepsilon_0\chi E_0$, poste a distanza $\pm h/2$. Queste generano al centro un campo aggiuntivo E_b

$$E_b \simeq -2\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(h/2)^2} = -2\chi E_0\left(\frac{a}{h}\right)^2 \; , \tag{14}$$

corrispondente a una correzione al secondo ordine. Il campo totale è $\mathbf{E}_i + \mathbf{E}_b = \mathbf{E}_0(1 - 2\chi(a/h)^2)$.

Nel caso "magnetico", per l'analogia tra le formule relative a $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$, abbiamo una correzione al campo nel centro data da

$$\mathbf{H}_b = -2\chi_\mathrm{m}\mathbf{H}_0\left(\frac{a}{h}\right)^2 \; , \tag{15}$$

dove $H_0 = B_0/\mu_0$.

L'analogia usata per ottenere l'espressione precedente può essere resa più esplicita notando che per effetto della magnetizzazione $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}_0$ sulle basi del cilindro magnetizzato compaiono densità superficiali di fittizia "carica magnetica" $\sigma_m = \pm M$, ovvero due "cariche" $Q_m = M\pi a^2$ che producono un campo

$$H_b \simeq -2\frac{1}{4\pi}\frac{Q_m}{(h/2)^2} = -2\chi_\mathrm{m}H_0\left(\frac{a}{h}\right)^2 \; , \tag{16}$$

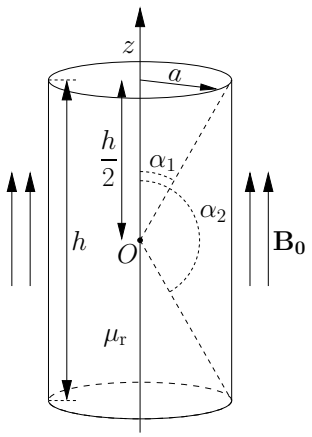
Ricordando che $\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$, otteniamo per il campo totale nel centro

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H}_0 + \mathbf{M}) + \mu_0\mathbf{H}_b = \mu_r H_0 + \mu_0 H_b \equiv \mathbf{B}_i + \mathbf{B}_b \; , \tag{17}$$

ovvero

$$\mathbf{B}_b = -2\chi_{\rm m}\mathbf{B}_0\left(\frac{a}{h}\right)^2 \ . \tag{18}$$

Notare che a questo ordine sarebbe stato scorretto scrivere $\mathbf{B}_b = \mu_r\mu_0\mathbf{H}_b$, per lo stesso motivo per cui sarebbe scorretto nel caso precedente sostituire ε_0 con ε nella formula (14) per $\mathbf{E}_b$: questo perché le cariche considerate sono cariche di polarizzazione, e quindi inserire μ_r o ε_r vorrebbe dire contare doppiamente gli effetti della polarizzazione del mezzo.



In alternativa, possiamo ricordare che, all'ordine zero, nel cilindro abbiamo una magnetizzazione $\mathbf{M} = \chi_{\rm m}\mathbf{H}_i = \chi_{\rm m}\mathbf{B}_i/(\mu_0\mu_{\rm r}) = \chi_{\rm m}\mathbf{B}_0/\mu_0$. Alla magnetizzazione corrisponde una corrente superficiale sulla superficie laterale del cilindro

$$\mathbf{K}_{\rm m} = M\hat{\boldsymbol{\phi}} = \chi_{\rm m}\frac{B_0}{\mu_0}\,\hat{\boldsymbol{\phi}} = (\mu_{\rm r}-1)\frac{B_0}{\mu_0}\,\hat{\boldsymbol{\phi}}\,. \tag{19}$$

Il cilindro corrisponde allora a un solenoide finito di altezza h e raggio a con il prodotto nI equivalente a $nI = K_{\rm m}$. Il campo generato dalla magnetizzazione al centro del solenoide finito si ottiene quindi dalla formula

$$\begin{aligned} B_M &= \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) = \frac{\mu_0 K_{\rm m}}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right) \\ &= (\mu_{\rm r}-1)\,\frac{B_0}{2}\left(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2\right)\,. \end{aligned} \tag{20}$$

D'altra parte

$$\cos\alpha_1 = -\cos\alpha_2 = \frac{h/2}{\sqrt{a^2+(h/2)^2}} \simeq 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{h}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{a}{h}\right)^2\ , \tag{21}$$

quindi

$$B_M \simeq (\mu_{\rm r}-1)\,B_0\left[1 - 2\left(\frac{a}{h}\right)^2\right]\ . \tag{22}$$

Il campo complessivo al centro del solenoide è pari al campo esterno più il campo dovuto alla magnetizzazione

$$B(0) = B_0 + B_M = \mu_{\rm r}B_0 - 2\mu_{\rm r}B_0\left(\frac{a}{h}\right)^2 + 2B_0\left(\frac{a}{h}\right)^2 = \mu_{\rm r}B_0 - 2(\mu_{\rm r}-1)B_0\left(\frac{a}{h}\right)^2\ , \tag{23}$$

in accordo col risultato precedente. Ovviamente si può anche risolvere prima il problema "magnetico" in questo modo e poi usare l'analogia tra $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ per ottenere la soluzione del problema "elettrico".

Nel caso di cilindro magnetico "schiacciato", il campo prodotto al centro dalla corrente superficiale può essere approssimato con quello prodotto da una spira circolare di raggio a con corrente $I_s = K_{\rm m}h$:

$$B_b = \frac{\mu_0 I_s}{2\pi a} = \frac{\mu_0 M}{2\pi}\frac{a}{h}\,. \tag{24}$$

All'ordine più basso, all'interno del cilindro $H_i \simeq B_0/\mu$ da cui $M \simeq \chi_{\rm m}B_0/\mu$ e si ottiene

$$B_b = \frac{\chi_{\rm m}}{2\pi\mu_r}\frac{a}{h}B_0\,. \tag{25}$$

Notando che vale anche $H_i = B_0/\mu - M$, al secondo ordine si ha

$$H_i + H_b = \simeq (B_0 + B_b)/\mu_0 - M \simeq H_i + B_b/\mu_0\,. \tag{26}$$

(Notare che M è calcolata tenendo conto solo di B_0, consistentemente con lo sviluppo utilizzato.) Otteniamo allora

$$H_b = \frac{B_b}{\mu_0} = \frac{\chi_{\rm m}}{2\pi\mu_r\mu_0}\frac{a}{h}B_0 = \frac{\chi_{\rm m}}{2\pi\mu_r}\frac{a}{h}H_0 \ . \tag{27}$$

Per analogia, la soluzione del caso elettrico è quindi

$$E_b = \frac{\chi}{2\pi\varepsilon_r}\frac{a}{h}E_0 \ . \tag{28}$$

2

a) I campi elettrici possono essere scritti come

$$\mathbf{E}_1 = \mathrm{Re}\left(E_0\hat{\mathbf{y}}\mathrm{e}^{ikx-i\omega t}\right) \ , \qquad \mathbf{E}_2 = \mathrm{Re}\left(E_0\hat{\mathbf{x}}\mathrm{e}^{iky-i\omega t+i\varphi}\right) \ . \tag{29}$$

L'equazione del moto, nel limite non relativistico e assumendo $kx \ll 1$, $ky \ll 1$ è

$$m\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2} = q(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)|_{x=0,y=0} \tag{30}$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{r}(t) = \frac{qE_0}{m\omega^2}[\hat{\mathbf{x}}\cos(\omega t) + \hat{\mathbf{y}}\cos(\omega t + \varphi)] \ . \tag{31}$$

Per $\varphi = 0$ si ottiene $x(t) = y(t)$, ovvero il moto della carica è lineare lungo la bisettrice $x = y$. Analogamente per $\varphi = \pi$ il moto è lungo $x = -y$.

Per $\varphi = \pi/2$ il moto della carica è circolare nel piano xy.

b) In generale la radiazione può essere analizzata come quella dovuta a due dipoli indipendenti ortogonali $p_x(t) = qx(t)$ e $p_y(t) = qy(t)$. La polarizzazione è data dalla proiezione del dipolo sul piano ortogonale alla direzione di osservazione. Quindi la polarizzazione osservata lungo gli assi x e y è sempre lineare, mentre quella lungo z è generalmente ellittica.

Per $\varphi = 0$ o π la polarizzazione lungo z è lineare e diretta lungo le bisettrici, mentre per $\varphi = \pi/2$ la polarizzazione è circolare.

La potenza irraggiata, essendo i dipoli ortogonali, può essere calcolata come la somma delle potenze dovute a ciascun dipolo ed è quindi indipendente da φ. Si ottiene (in media sul periodo)

$$P_d = 2\frac{1}{3c^3}\left(\frac{qE_0}{m}\right)^2 = 2P_0 \ , \tag{32}$$

dove P_0 è la potenza diffusa in presenza di una sola onda.

c) In questo caso si può scrivere

$$\mathbf{E}_1 = \mathrm{Re}\left(E_0\hat{\mathbf{z}}\mathrm{e}^{ikx-i\omega t}\right) \ , \qquad \mathbf{E}_2 = \mathrm{Re}\left(E_0\hat{\mathbf{z}}\mathrm{e}^{iky-i\omega t+i\varphi}\right) \ . \tag{33}$$

La carica oscilla lungo l'asse z e quindi la polarizzazione della radiazione emessa è lineare indipendentemente da φ. Lungo l'asse z non si osserva radiazione. L'ampiezza di oscillazione è nulla nel caso $\varphi = \pi$ poichè in tal caso $\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$.

La potenza diffusa (sempre in media sul periodo) è data da

$$P_d = \frac{1}{3c^3}\left(\frac{qE_0}{m}\right)^2 |1 + \mathrm{e}^{i\varphi}|^2 = 2P_0(1 + \cos\varphi) \ . \tag{34}$$

Si ottiene $P_d = 4P_0$ per $\varphi = 0$, $P_d = 2P_0$ per $\varphi = \pi/2$ e $P_d = 0$ per $\varphi = \pi$.