

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016-2017

Compito di Fisica 2 (09/02/2018)

1

Un condensatore piano è costituito da due armature metalliche circolari identiche posta a distanza h e aventi raggio $a \gg h$. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

a) Si assuma che le armature siano isolate e che su di esse si trovino le cariche $\pm Q$ rispettivamente. A $t = 0$ le armature sono lasciate libere di muoversi nella direzione ortogonale alla superficie. Determinare l'energia cinetica delle armature quando esse si sono avvicinate di un tratto δ ($< h$).

b) Si risponda alla stessa domanda del punto a) ma nel caso di armature connesse da un generatore di tensione costante V (anche se non strettamente necessario, si può assumere per comodità $\delta \ll h$).

c) Sia nel caso a) che b), si stabilisca se durante il moto delle armature viene generato campo magnetico nello spazio tra esse, e si calcoli in funzione della distanza tra di esse $Z = Z(t)$ il flusso del vettore di Poynting attraverso una superficie cilindrica di raggio $r < a$ e altezza $p < Z$ coassiale e interna al condensatore. (Si assuma l'approssimazione di campi lentamente variabili.)

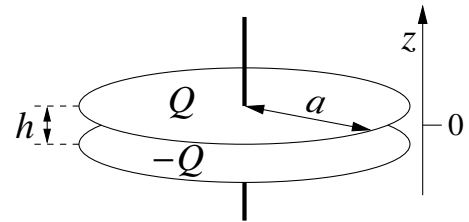


Figura 1

2

Una particella di carica q e massa m è legata da un capo di forza centrale $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$.

a) Assumendo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio a nel piano xy , determinare la frequenza ω della radiazione emessa e la potenza irradiata P_r .

b) Per effetto dell'irraggiamento la carica perde energia: calcolare la variazione temporale del raggio dell'orbita $a = a(t)$ (con $a(0) = a_0$) assumendo che l'energia persa per un periodo di rivoluzione sia piccola rispetto all'energia totale (si dia a posteriori una condizione di validità dell'ipotesi).

c) Si consideri ora l'effetto di un campo magnetico $\mathbf{B}_0$, costante, uniforme e perpendicolare al piano dell'orbita. Come cambiano le per ω e P_r al punto a), assumendo lo stesso valore di a per il raggio?

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (2)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (3)$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (4)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (5)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

SOLUZIONI

1

a) Nel caso di carica Q costante conviene scrivere l'energia elettrostatica del condensatore nella forma $U_{\text{es}} = \frac{1}{2}Q^2/C$, dove C è la capacità del condensatore. Chiamando $A = \pi a^2$ la superficie della singola armatura e $2z$ la distanza istantanea tra le armature stesse abbiamo $C = \varepsilon_0 A/(2z)$. Quando $2z$ passa da h a $h - \delta$ abbiamo una variazione di energia elettrostatica

$$\Delta U_{\text{es}} = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} [(h - \delta) - h] = -\delta \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} . \quad (6)$$

L'energia elettrostatica persa si trasforma in energia cinetica K , quindi abbiamo

$$K = -\Delta U_{\text{es}} = \delta \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} . \quad (7)$$

Allo stesso risultato si giunge tenendo presente che l'energia elettrostatica può anche essere scritta come $U_{\text{es}} = \varepsilon_0 E^2 A(2z)/2$, dove $2zA$ è il volume ed E il campo elettrico tra le due armature. Infatti abbiamo

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} . \quad (8)$$

A carica costante E rimane costante durante il moto. Allo stesso risultato si giunge ancora calcolando il lavoro W fatto sulle due armature dalle forze $F = QE/2$ (si noti che la forza per unità di superficie è $\sigma E/2$). Abbiamo infatti

$$K = W = 2 \cdot F \cdot \frac{\delta}{2} = QE \frac{\delta}{2} = Q \frac{Q}{\varepsilon_0 A} \frac{\delta}{2} = \delta \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 A} . \quad (9)$$

b) Nel caso che le armature siano connesse a un generatore di differenza di potenziale costante V conviene scrivere l'energia elettrostatica del condensatore nella forma $U_{\text{es}} = CV^2/2$, sempre con $C = \varepsilon_0 A/(2z)$. In questo caso l'energia elettrostatica del condensatore aumenta, abbiamo infatti

$$\Delta U_{\text{es}} = \frac{V^2}{2} (C_{\text{fin}} - C_{\text{in}}) = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \left(\frac{1}{h - \delta} - \frac{1}{h} \right) \simeq \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \frac{\delta}{h^2} . \quad (10)$$

Dove, nell'ultimo passaggio, abbiamo sfruttato il fatto che $\delta \ll h$. Va poi tenuto presente che il generatore fornisce un'energia pari al doppio dell'aumento di energia elettrostatica, quindi l'energia cinetica è

$$K = -\Delta U_{\text{tot}} = +\Delta U_{\text{es}} \simeq \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \frac{\delta}{h^2} . \quad (11)$$

Allo stesso risultato si può arrivare considerando che in questo caso abbiamo, per carica delle armature, campo elettrico tra le armature stesse e forza agente sulla singola armatura:

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 AV}{2z} , \quad E = \frac{V}{2z} , \quad \text{e} \quad F = \frac{1}{2}QE = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{8z^2} . \quad (12)$$

Chiamando W il lavoro fatto dalle forze abbiamo per l'energia cinetica

$$K = W = 2 \int_{h/2}^{(h-\delta)/2} \frac{\varepsilon_0 AV^2}{8z^2} dz = \frac{\varepsilon_0 AV^2}{4} \left(\frac{2}{h - \delta} - \frac{2}{h} \right) \simeq \frac{\varepsilon_0 AV^2}{2} \frac{\delta}{h^2} . \quad (13)$$

c) Come abbiamo visto, nel caso di carica costante è costante anche il campo elettrico tra le armature. Essendo $\partial_t \mathbf{E} = 0$ è nulla la corrente di spostamento, e quindi non abbiamo campo magnetico, $\mathbf{B} = 0$. Nel caso di differenza di potenziale V costante abbiamo invece (in coordinate cilindriche)

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \frac{V}{z(t)}, \quad \text{da cui otteniamo, data la simmetria del problema,} \quad \mathbf{B} = -\hat{\phi} \frac{r}{2c^2} \frac{V}{Z^2} \dot{Z}, \quad (14)$$

(dove Z è la distanza tra le armature, non la coordinata cilindrica z !) che portano a un vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} = \mathbf{r} \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{V^2}{Z^3} S \dot{Z} \quad (15)$$

Notare che $\dot{Z} < 0$ quindi $\mathbf{S} < 0$ come deve perché l'energia dei campi nel volume tra le due armature *aumenta*. Per il flusso di $\mathbf{S}$ abbiamo

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi r p \cdot r \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{V^2}{Z^3} S \dot{Z} = \pi r^2 p \varepsilon_0 \frac{V^2}{Z^3} \dot{Z} = -\pi r^2 p \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\frac{V^2}{Z^2} \right) = -\frac{dU_{\text{es}}(r, p)}{dt}. \quad (16)$$

Si può mostrare (anche se non richiesto nelle domande) che l'aumento di energia cinetica è pari all'integrale di $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ sulle lastre (dove in questo caso $\mathbf{J}(z, t) = \hat{\mathbf{z}} Q \dot{Z} [\delta(z - Z/2) - \delta(z + Z/2)]$).

2

a) Per una forza centrale armonica abbiamo $\omega = \omega_0$ indipendentemente da a . L'orbita viene percorsa a velocità $v = a\omega_0$. Il momento di dipolo $\mathbf{p}$ vale

$$\mathbf{p} = qa (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t), \quad \text{con derivata seconda} \quad \ddot{\mathbf{p}} = -qa\omega_0^2 (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t). \quad (17)$$

Per la potenza irradiata abbiamo

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 \quad (18)$$

che è indipendente dal tempo.

b) L'energia totale è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, che sono uguali

$$U = U_{\text{pot}} + K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 = m \omega_0^2 a^2. \quad (19)$$

Supponendo che tutta l'energia persa vada in energia irradiata abbiamo

$$P_r = -\frac{dU}{dt}, \quad (20)$$

che, combinata con la (18), ci dà

$$2m\omega_0^2 a \frac{da}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4, \quad \text{ovvero} \quad \frac{da}{dt} = -\frac{k_0 q^2 \omega_0^2}{3mc^3} a = -\frac{a}{\tau}, \quad (21)$$

con soluzione $a(t) = a(0) e^{-t/\tau}$: il moto è a spirale, con

$$\tau = \frac{3mc^3}{k_0 q^2 \omega_0^2}. \quad (22)$$

L'approssimazione usata è valida se $\tau \gg 2\pi/\omega_0$, cioè se il tempo di spiraleggiamento è molto lungo rispetto al periodo dell'orbita.

c) Per un moto circolare nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}$, la forza magnetica è radiale:

$$\mathbf{f}_m = q\mathbf{v} \times \mathbf{B} = q(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \times \mathbf{B} = q [-(\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r})\mathbf{B} + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{B})\mathbf{r}] = q\omega B_0 \mathbf{r} ,$$

dove $B_0 > 0$ o $B_0 < 0$ nel caso in cui $\mathbf{B}$ sia parallelo o antiparallelo a $\boldsymbol{\omega}$, rispettivamente. La forza centripeta $-m\omega^2 a$ deve quindi essere data da

$$-m\omega^2 a = -m\omega_0^2 a + \omega q B_0 a \quad (23)$$

che, dividendo per am , diventa

$$\omega^2 + \omega_L \omega + \omega_0^2 = 0 , \quad \text{dove} \quad \omega_L = \frac{qB_0}{m} \quad (24)$$

che ha soluzioni

$$\omega_{\pm} = \frac{-\omega_L \pm \sqrt{\omega_L^2 + 4\omega_0^2}}{2} . \quad (25)$$

La soluzione col segno meno è da scartare avendo preso per convenzione $\omega > 0$. Per $\omega_L \ll \omega_0$ si ha $\omega \simeq \omega_0 - \omega_L/2$, ovvero la frequenza diminuisce o aumenta a seconda del segno del prodotto qB_0 . Le risposte al punto precedente cambiano sostituendo ω a ω_0 .