Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (08/02/2019)

1

Una spira conduttrice rigida quadrata di lati a e b giace nel piano xy, in presenza di un campo magnetico costante e disomogeneo $\mathbf{B} = B_z(x)\hat{\mathbf{z}}$ perpendicolare alla superficie della spira (Fig.1)

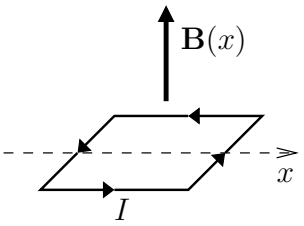


Figura 1

a) Se nella spira si mantiene la corrente costante I mediante un generatore, calcolare la forza totale sulla spira $\mathbf{F}$ in funzione di $\mathbf{B}$ e mostrare che, in approssimazioni opportune da specificare, essa è in accordo con la

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \,, \tag{1}$$

dove $\mathbf{m}$ è il momento magnetico della spira.

b) La spira di Fig.1 (di resistenza R) è ora sconnessa da ogni generatore e mantenuta in moto uniforme lungo $\hat{\mathbf{x}}$ con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$. Calcolare nuovamente $\mathbf{F}$ e dire se la (1) può ancora essere usata.

c) Si consideri ora una spira circolare conduttrice di raggio a con l'asse coincidente con l'asse z di un sistema di coordinate cilindriche (r, ϕ, z). La spira si trova ad una certa altezza Z, in presenza di un campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(r, z)$ avente simmetria cilindrica rispetto all'asse z (Fig.2). Un generatore mantiene nella spira una corrente costante I. Si risponda alle stesse domande del punto **a)**.

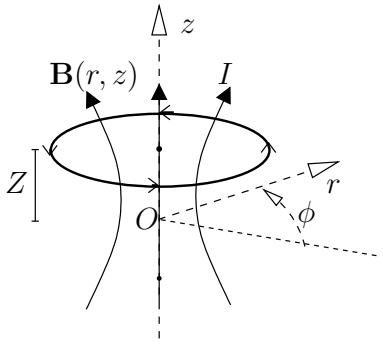


Figura 2

2

Un elettrone classico è in presenza dei campi di un'onda elettromagnetica monocromatica piana il cui campo elettrico ha la forma

$$\mathbf{E} = E_0\hat{\mathbf{y}}\cos(kx - \omega t) = \mathrm{Re}\left[E_0\hat{\mathbf{y}}\mathrm{e}^{ikx - i\omega t}\right] \tag{2}$$

e di un campo magnetico statico e uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{\mathbf{z}}$.

a) Trovare la soluzione a regime dell'equazione del moto dell'elettrone sotto l'azione di $\mathbf{E}$ e della forza magnetica dovuta a $\mathbf{B}_0$, determinando eventuali risonanze. (Si trascuri il campo magnetico dell'onda e si assuma che l'ampiezza del moto sia piccola rispetto alla lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi/k$; per semplicità si possono trascurare termini di attrito.)

b) Si studi la radiazione diffusa dall'elettrone specificando la polarizzazione osservata lungo ciascuno degli assi (x, y, z), il rapporto tra le intensità osservate lungo ciascun asse, e la potenza totale.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati.*

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0,\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}=-\partial_t\mathbf{B},\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=\mu_0(\mathbf{J}+\varepsilon_0\partial_t\mathbf{E})\ . \tag{3}$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f}=\mathbf{J}\times\mathbf{B}d^3x=Id\boldsymbol{\ell}\times\mathbf{B}\ . \tag{4}$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x=\mathbf{J}Sd\ell=Id\boldsymbol{\ell}$.

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e=k_0\frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\rm rit})\times\hat{\mathbf{r}})\times\hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \tag{5}$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$

$$P_{\rm irr}=\frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2\ \ . \tag{6}$$

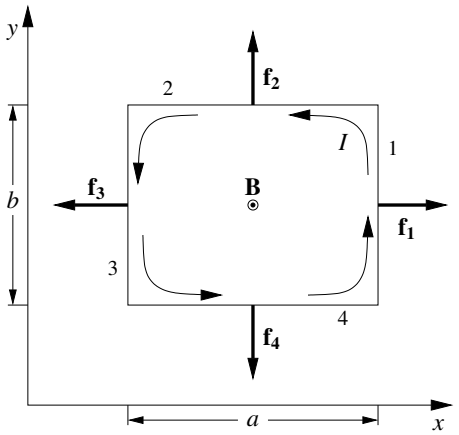
Operatore divergenza in coordinate cilindriche (r,ϕ,z)

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{V}=r^{-1}\partial_r(rV_r)+r^{-1}\partial_\phi V_\phi+\partial_z V_z\ . \tag{7}$$

SOLUZIONI

1

a) Consideriamo separatamente le forze che agiscono sui singoli lati della spira, che numeriamo da 1 a 4 come in figura. Data la simmetria del problema, le forze $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ e $\mathbf{f}_4$ giacciono sul piano xy e sono perpendicolari ai lati su cui agiscono, dirette verso l'esterno della spira come in figura. Poiché, per ipotesi, il campo $\mathbf{B}$ dipende solo da x, le forze $\mathbf{f}_2$ e $\mathbf{f}_4$ sono uguali ed opposte, e si cancellano. Indichiamo con B_1 il valore del campo magnetico sul lato 1, e con B_3 il suo valore sul lato 3. La forza complessiva agente sulla spira vale



$$\mathbf{F} = \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_3 = \hat{\mathbf{x}}\, Ib\,(B_1 - B_3) \tag{8}$$

Se facciamo l'ipotesi che i lati della spira siano sufficientemente piccoli da poter trattare al primo ordine la variazione del campo magnetico sulla superficie della spira stessa (in realtà, basta supporre che a sia sufficientemente piccolo), e indichiamo con B_0 il valore del campo al centro della spira, potremo scrivere

$$B_1 = B_0 + \frac{a}{2}\frac{\partial B}{\partial x}\,, \quad B_3 = B_0 - \frac{a}{2}\frac{\partial B}{\partial x}\,, \quad \text{da cui} \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\, Iab\,\frac{\partial B}{\partial x} = \hat{\mathbf{x}}\, m\,\frac{\partial B}{\partial x}\,, \tag{9}$$

dove $\mathbf{m} = \hat{\mathbf{z}}\, Iab$ è il momento magnetico della spira. Dato che, in questo caso, la corrente viene mantenuta costante dal generatore, anche m è costante e quindi possiamo scrivere

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\,\frac{\partial\,(mB)}{\partial x} \tag{10}$$

in accordo con la formula $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})$.

b) Adesso non abbiamo più il generatore, ma nella spira compare una forza elettromotrice indotta $\mathcal{E}$ dovuta al fatto che il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso di essa cambia nel tempo. Con l'ipotesi fatta alla fine del punto precedente, e un'opportuna scelta dell'origine dei tempi, possiamo scrivere $\Phi = ab\,B(x) = ab\,B(Vt)$. Abbiamo quindi

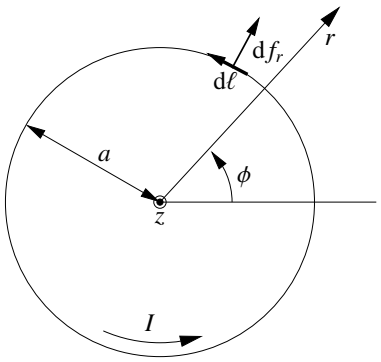
$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -ab\,\frac{\mathrm{d}B(Vt)}{\mathrm{d}t}\,, \quad \text{da cui} \quad I = -\frac{ab}{R}\,\frac{\mathrm{d}B(Vt)}{\mathrm{d}t} = -\frac{ab}{R}\,\frac{\partial B}{\partial x}\,V\,. \tag{11}$$

Avremo quindi per la forza

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{x}}\left(-\frac{ab}{R}\,\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{x=Vt} V\right) ab\,\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{x=Vt} = -\hat{\mathbf{x}}\,\frac{(ab)^2}{R}\left(\left.\frac{\partial B}{\partial x}\right|_{x=Vt}\right)^2\,. \tag{12}$$

La forza non è scrivibile nella forma (1) in quanto $\mathbf{m}$ è proporzionale al gradiente di $\mathbf{B}$, non a $\mathbf{B}$.

c) Il campo magnetico esterno ha simmetria cilindrica e, in un sistema di coordinate cilindriche (r, ϕ, z), componenti lungo r e lungo z: $\mathbf{B}(r,z) \equiv \big[B_r(r,z), 0, B_z(r,z)\big]$. La forza $\mathrm{d}\mathbf{f}$ che agisce su un pezzetto $\mathrm{d}\ell$ della spira ha componenti

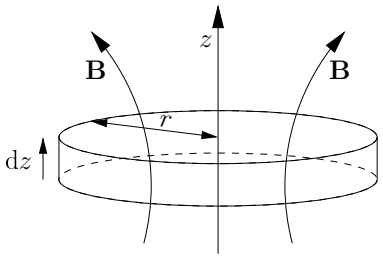


$$\mathrm{d}f_r = \hat{\mathbf{r}}\, I\, \mathrm{d}\ell\, B_z(a,Z)\ , \quad \mathrm{d}f_\phi = 0\ , \quad \mathrm{d}f_z = -\hat{\mathbf{z}}\, I\, \mathrm{d}\ell\, B_r(a,Z)\ , \tag{13}$$

dove Z è l'altezza a cui si trova la spira. Integrando in $\mathrm{d}\ell$ su tutta la circonferenza le componenti radiali si annullano, e rimane per la forza totale sulla spira

$$\mathbf{F} = -\hat{\mathbf{z}}\, 2\pi a\, I B_r(a,Z)\ . \tag{14}$$

Per dimostrare l'equivalenza con l'espressione



$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}}\, \frac{\partial(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})}{\partial z}\ , \tag{15}$$

con $\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}}$, esprimiamo B_r in funzione di B_z. La condizione $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0$ in coordinate cilindriche si scrive

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rB_r)}{\partial r} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0\ . \tag{16}$$

Vicino all'asse, in modo da poter approssimare $B_z(r,z) \simeq B_z(0,z)$ si può quindi integrare

$$\int_0^r \frac{\partial(r' B_r(r',z))}{\partial r'}\mathrm{d}r' = rB_r(r,z) \simeq -\int_0^r r' \frac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}\mathrm{d}r' = -\frac{r^2}{2}\frac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}\ , \tag{17}$$

da cui

$$B_r(r,z) \simeq -\frac{r}{2}\frac{\partial B_z(0,z)}{\partial z}\ , \tag{18}$$

da cui

$$B_r(a,Z) = -\frac{1}{2}\, a\, \frac{\partial B_z}{\partial z}\ , \quad \text{e} \quad \mathbf{F} = \hat{\mathbf{z}}\, 2\pi a\, I\, \frac{1}{2}\, a\, \frac{\partial B_z}{\partial z} = \hat{\mathbf{z}}\, \pi a^2 I\, \frac{\partial B_z}{\partial z} = \hat{\mathbf{z}}\, m\, \frac{\partial B_z}{\partial z}\ , \tag{19}$$

in accordo con la formula $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})$.

Alternativamente, possiamo calcolare il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso il cilindretto mostrato nella figura, facendo l'ipotesi che il raggio sia sufficientemente piccolo da prendere B_z uniforme sulle superfici di base. Il flusso attraverso la superficie del cilindretto deve essere nullo. Avremo così

$$0 = \pi r^2 [B_z(0, z+\mathrm{d}z) - B_z(0,z)] + B_r(r,z)\, 2\pi r\, \mathrm{d}z \simeq \pi r^2\, \frac{\partial B_z}{\partial z}\, \mathrm{d}z + B_r(r,z)\, 2\pi r\, \mathrm{d}z\ , \tag{20}$$

da cui

$$B_r(r,z) = -\frac{1}{2}\, r\, \frac{\partial B_z}{\partial z}\ . \tag{21}$$

2

a) Nelle approssimazioni di moto non relativistico si può assumere $kx = \text{cost.} = 0$ nell'argomento del campo dell'onda e le equazioni del moto si riducono a

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = -\frac{e}{m_e} v_y B_0\ , \qquad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = +\frac{e}{m_e} v_x B_0 - \frac{e}{m_e} E_0 \cos\omega t\ . \tag{22}$$

Conviene lavorare in notazione complessa scrivendo $\mathbf{v}(t) = \mathrm{Re}\,[\tilde{\mathbf{v}}\mathrm{e}^{-i\omega t}]$, etc., ottenendo così per le ampiezze

$$-i\omega\tilde{v}_x = -\frac{eB_0}{m_e}\tilde{v}_y \ , \qquad -i\omega\tilde{v}_y = +\frac{eB_0}{m_e}\tilde{v}_x - \frac{eE_0}{m_e} \ . \tag{23}$$

Posto $eB_0/m_e = \omega_c$ (frequenza di ciclotrone) e risolvendo il sistema lineare si ottiene

$$\tilde{v}_x = -\frac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{eE_0}{m_e} \ , \qquad \tilde{v}_y = -\frac{i\omega}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{eE_0}{m_e} \ , \tag{24}$$

ovvero

$$v_x = -\frac{\omega_c}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{eE_0}{m_e}\cos\omega t \ , \qquad v_y = -\frac{\omega}{\omega^2-\omega_c^2}\frac{eE_0}{m_e}\sin\omega t \ . \tag{25}$$

In alternativa, derivando le equazioni del moto rispetto a t e sostituendo si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{e}{m_e}B_0\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -\omega_c^2 v_x + \omega_c\frac{e}{m_e}E_0\cos\omega t \ , \tag{26}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{e}{m_e}B_0\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \frac{e}{m_e}\omega E_0\sin\omega t = -\omega_c^2 v_y + \frac{e}{m_e}\omega E_0\sin\omega t \ , \tag{27}$$

ovvero due equazioni di oscillatori armonici forzati, con frequenza propria ω_c e soluzioni a regime date dalle (25).

b) La derivata seconda del momento di dipolo è

$$\ddot{\mathbf{p}} = -e(\dot{v}_x, \dot{v}_y) = (\omega_c\sin\omega t, -\omega\cos\omega t)\frac{\omega}{\omega_c^2-\omega^2}\frac{e^2}{m_e}E_0 \ . \tag{28}$$

Lungo x (y) contribuisce solo p_y (p_x) con polarizzazione lineare lungo y (x). Il rapporto delle intensità tra le direzioni x e y è $(\omega_c/\omega)^2$ che diviene uguale in risonanza (divergenze a parte, dovute al fatto che per semplicità abbiamo trascurato termini di attrito). Lungo z si osserva in generale polarizzazione ellittica, circolare in risonanza.

La potenza totale (mediata sul periodo) è

$$P = \frac{1}{3c^2}\left(\frac{e^2}{m_e}E_0\right)^2\frac{\omega^2(\omega^2+\omega_c^2)}{(\omega_c^2-\omega^2)^2} \ . \tag{29}$$