

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2 (28/02/2022)

1

Si consideri un cilindro di raggio a e altezza h con una cavità coassiale di raggio $b < a$, con magnetizzazione uniforme $\mathbf{M}$ parallela all'asse. Determinare il campo magnetico al centro della cavità nei limiti

- a) $h \gg a$ (cilindro lungo, figura 1-i),
- b) $h \ll a$ (cilindro schiacciato, figura 1-ii).

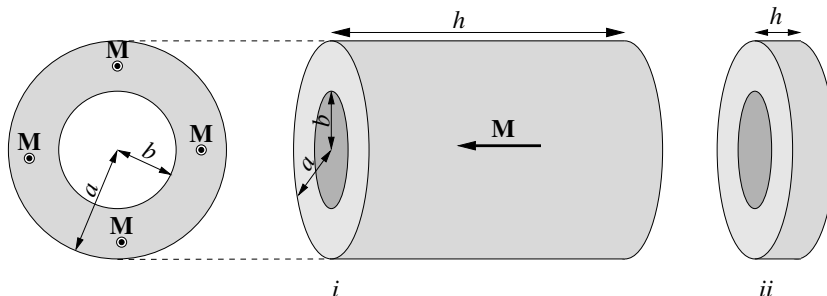


Figura 1:

2

Un circuito di forma rettangolare è formato da due guide parallele, distanti a ed aventi lunghezza infinita, più due sbarrette ortogonali alle guide delle quali una è mantenuta fissa e l'altra è libera di scorrere senza attrito meccanico lungo le guide mantenendo il contatto elettrico. La resistenza è R ed è supposta indipendente dalla posizione della sbarretta mobile la cui massa è m . Un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}_0$ è ortogonale al piano del circuito.

- a) Supponendo che a $t = 0$ la sbarretta abbia velocità iniziale V_0 , determinare la legge oraria del moto e la distanza percorsa trascurando l'autoinduzione del circuito.

- b) Si dica, anche solo qualitativamente, come la risposta **a)** viene modificata tenendo conto di un coefficiente di autoinduzione costante L .

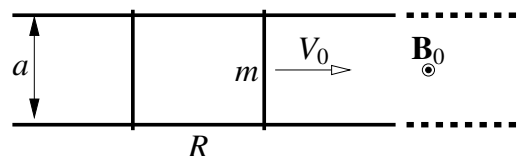


Figura 2:

3

Sul piano $x = 0$ è presente una distribuzione uniforme di correnti dipendenti dal tempo tali che nell'immediata prossimità della superficie ($x = 0^+$) si misura un campo elettrico uniforme $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}}E_0 \cos \omega t = \hat{\mathbf{y}}\text{Re}(E_0 e^{-i\omega t})$.

Determinare in tutta la regione $x > 0$

- a) il campo elettrico,
- b) il campo magnetico e il flusso di energia elettromagnetica.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Equazioni della magnetostatica dei mezzi con densità di polarizzazione magnetica $\mathbf{M}$ in assenza di correnti “libere”

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \nabla \times \mathbf{H} = 0 , \quad \mathbf{B} \equiv \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) , \quad \mathbf{J}_M = \nabla \times \mathbf{M} . \quad (2)$$

SOLUZIONI

1

a) Per un cilindro pieno lungo, uniforme e uniformemente magnetizzato parallelamente all'asse il campo magnetico interno vale $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M}$, come si deduce dal fatto che la corrente superficiale $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$ è distribuita come in un solenoide in cui $nI = K$. Questo risultato è indipendente dal raggio del cilindro. Di conseguenza il campo nella cavità può essere calcolato come la somma di quello di due lunghi cilindri coassiali con magnetizzazione opposta, ed è quindi nullo.

b) Sempre usando la corrente superficiale $\mathbf{K} = \mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}$, un cilindro pieno schiacciato di raggio a è equivalente a una spira circolare con corrente $I = Mh$ e campo al centro $\mathbf{B} = (\mu_0 I / 2a) \hat{\mathbf{z}} = \mu_0 \mathbf{M}(h/a)$. Il campo nella cavità si ottiene per sovrapposizione

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{M} h \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right). \quad (3)$$

2

a) Se $V = dX/dt$ è la velocità della sbarretta, nel circuito rettangolare costituito dalle due sbarrette e dalle porzioni di guide tra di esse si ha un flusso del campo magnetico variabile $\Phi(t) = B_0 a X(t)$, quindi una forza elettromotrice indotta

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 a V, \quad (4)$$

e per induzione circola quindi la corrente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{B_0 a V}{R}. \quad (5)$$

Sulla sbarretta agisce allora la forza magnetica

$$F = B_0 a I = -\frac{B_0^2 a^2}{R} V, \quad (6)$$

da cui l'equazione del moto

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{B_0^2 a^2}{R} V, \quad (7)$$

con soluzione esponenziale

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{con} \quad \tau = \frac{R}{B_0^2 a^2}, \quad (8)$$

e distanza percorsa limite

$$X(\infty) = \int_0^\infty V_0 e^{-t/\tau} dt = V_0 \tau. \quad (9)$$

b) In presenza di autoinduzione la forza elettromotrice è

$$RI = \mathcal{E} = -B_0 a V - L \frac{dI}{dt}, \quad (10)$$

da accoppiare all'equazione del moto

$$\frac{dV}{dt} = B_0 a I . \quad (11)$$

Dalla (11) abbiamo

$$I = \frac{1}{B_0 a} \frac{dV}{dt} , \quad \frac{dI}{dt} = \frac{1}{B_0 a} \frac{d^2 V}{dt^2} , \quad (12)$$

che, inserite nella (10) ci danno

$$\frac{R}{B_0 a} \frac{dV}{dt} = -B_0 a V - \frac{L}{B_0 a} \frac{d^2 V}{dt^2} \quad (13)$$

$$L \frac{d^2 V}{dt^2} + R \frac{dV}{dt} + B_0^2 a^2 V = 0 . \quad (14)$$

Questa equazione è analoga a quella di un oscillatore armonico con frequenza propria $\omega_0 = \sqrt{B_0^2 a^2 / L}$ e un termine di attrito viscoso con coefficiente $\nu = R/L$. Quindi la velocità si smorzera esponenzialmente con tempo caratteristico $1/\nu$ ma, a seconda dei valori di ν e ω_0 , presenterà oscillazioni a frequenza $\simeq \omega_0$ rispetto all'andamento medio.

Per trovare la soluzione esplicita di questa equazione differenziale del secondo ordine, omogenea, lineare e a coefficienti costanti, ipotizziamo che $V = A e^{\alpha_1 t} + B e^{\alpha_2 t}$, dove $\alpha_{1,2}$ sono le soluzioni dell'equazione

$$L \alpha^2 + R \alpha + B_0^2 a^2 = 0 . \quad (15)$$

Le soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} = \frac{-R \mp \sqrt{R^2 - 4LB_0^2 a^2}}{2L} , \quad (16)$$

che, per $R^2 \geq 4LB_0^2 a^2$ danno per la velocità V un andamento smorzato, per $R^2 < 4LB_0^2 a^2$ oscillazioni smorzate.

3

a) La soluzione generale cercata è una soluzione dell'equazione d'onda nel vuoto con velocità di propagazione uguale a c . Poiché il sistema è invariante per traslazioni lungo y e z , la soluzione avrà la forma di un'onda piana $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t) = \mathbf{E}(x - ct)$ con $\mathbf{E}$ parallelo al piano essendo un'onda trasversale. Imponendo la continuità con il campo misurato a $x = 0^+$ si ha

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \cos(kx - ct) = \text{Re} (e^{ikx - i\omega t}) , \quad k = \frac{\omega}{c} . \quad (17)$$

b) Il campo magnetico si ottiene da

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{z}} E_0 k \sin(kx - ct) , \quad (18)$$

da cui

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} \frac{E_0}{c} \cos(kx - ct) . \quad (19)$$

Il flusso di energia è dato dal vettore di Poynting $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - ct)$ e ha valore medio $\langle \mathbf{S} \rangle = \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 c E_0^2 / 2$.