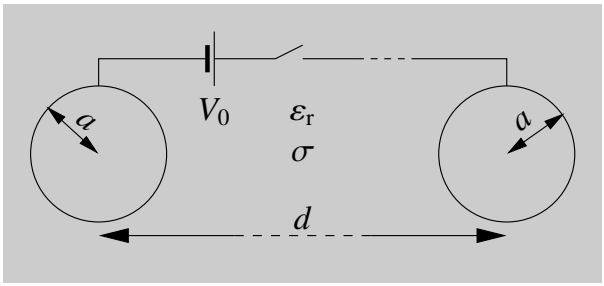
Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2 (03/02/2023)

1



Due sfere conduttrici identiche di raggio $a = 0.01$ m sono immerse a distanza $d = 1$ m in acqua pura avente permittività relativa $\varepsilon_r \simeq 80$ e conducibilità $\sigma = 5.5 \times 10^{-6}$ S/m (unità SI).

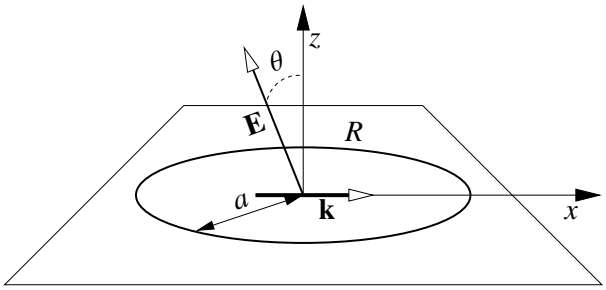
Si assuma inizialmente di poter trascurare gli effetti di induzione elettrostatica.

a) Se le sfere sono connesse fra loro attraverso un generatore ideale di d.d.p. $V_0 = 100$ V, calcolare la carica su ciascuna sfera, la corrente che scorre fra le sfere e la resistenza elettrica tra esse.

b) Se le sfere sono sconnesse e hanno a $t = 0$ le cariche $\pm Q_0$, calcolare il tempo di scarica. Si dica anche perché durante la scarica non viene generato campo magnetico nonostante il passaggio di corrente tra le sfere.

c) Si risponda nuovamente alle domande **a)** e **b)** tenendo conto degli effetti di induzione elettrostatica al primo ordine in a/d.

2



Una spira conduttrice circolare di raggio a, resistenza R e spessore trascurabile giace nel piano xy. Sulla spira incide un'onda elettromagnetica monocromatica piana propagantesi lungo x, con campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t)$ che forma un angolo θ con l'asse z; la lunghezza d'onda $\lambda = 2\pi c/\omega \gg a$. Calcolare

a) la corrente indotta nella spira;

b) il momento magnetico indotto nella spira e la coppia torcente esercitata dall'onda sia instantanea che mediata sul periodo;

c) la potenza $P_{\rm dif}$ (mediata sul periodo) diffusa dall'onda, scrivendo il risultato nella forma

$$P_{\rm dif} = A \left(\frac{a}{\lambda}\right)^{\alpha} \pi a^2 I \,, \tag{1}$$

dove I è l'intensità dell'onda incidente, A e α sono quantità adimensionali da determinare.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 1/\varepsilon_0 c^2 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \tag{2}$$

"Impedenza del vuoto"

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} = 376.37 \ \Omega . \tag{3}$$

Equazioni di Maxwell

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \tag{4}$$

Soluzione per il problema di una carica puntiforme q posta a distanza a da una sfera conduttrice di raggio $R < a$ mantenuta a potenziale nullo: si pone una carica immagine $q' = -(R/a)q$ a distanza $b = R^2/a$ dal centro della sfera, lungo la congiungente con la posizione di q.

Definizione di forza elettromotrice in un circuito

$$\mathcal{E} = \oint (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{\ell} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \Phi(\mathbf{B}) , \tag{5}$$

dove l'integrale di linea è eseguito sul circuito, $\mathbf{V}$ è la velocità locale dell'elemento di circuito e Φ è il flusso del campo magnetico che attraversa il circuito.

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo magnetico $\mathbf{m} = \mathbf{m}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^5} |\ddot{\mathbf{m}}|^2 . \tag{6}$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \tag{7}$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

SOLUZIONI

1

a) Per simmetria i potenziali delle sfere sono $\pm V_0/2$. Trascurando l'induzione elettrostatica le sfere hanno cariche $\pm Q$ uniformemente distribuite sulle loro superfici, che generano al loro esterno rispettivamente i potenziali

$$\Phi_\pm(r_\pm) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\pm Q}{r_\pm} \,, \tag{8}$$

con $r_\pm$ le distanze dai centri delle due sfere. Trascurando i potenziali generati da una sfera sull'altra e posto $\Phi_\pm(a) = \pm V_0/2$ si ottiene

$$Q = 2\pi\varepsilon a V_0 \,. \tag{9}$$

Per $V_0 = 100$ V si ha $Q = 4.5 \times 10^{-9}$ C.

Considerando una qualunque superficie S che racchiuda, per esempio, la sfera con carica Q, l'intensità di corrente uscente dalla sfera è

$$I = \int_S \sigma \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sigma \int_S \mathbf{E}\cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \sigma\frac{Q}{\varepsilon} \,, \tag{10}$$

dove si è usato il teorema di Gauss. Inserendo la (9) otteniamo $I = 2\pi a\sigma V_0$, da cui

$$R = \frac{V_0}{I} = \frac{1}{2\pi a\sigma} = 2.9 \times 10^6 \text{ Ohm} \,. \tag{11}$$

b) L'evoluzione della carica sulle sfere è data dall'equazione di continuità

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -I = -\sigma\frac{Q}{\varepsilon} \,, \tag{12}$$

da cui otteniamo $Q(t) = Q_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}$ con

$$\tau = \frac{\varepsilon}{\sigma} = 1.3 \times 10^{-4} \text{ s} \tag{13}$$

D'altra parte abbiamo anche per il campo elettrico $\partial_t \mathbf{E} = -\mathbf{E}/\tau$, quindi per il rotore del campo magnetico si ha

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon\partial_t\mathbf{E}) = \mu_0(\sigma - \sigma)\mathbf{E} = 0 \,, \tag{14}$$

ed il campo magnetico è nullo perché la corrente di conduzione è cancellata dalla corrente di spostamento.

c) All'ordine più basso gli effetti di induzione elettrostatica possono essere inclusi ponendo una carica immagine $\pm q$ con $q = (a/d)Q$ a distanza $d' = a^2/d$ dal centro delle rispettive sfere, e aggiungendo la carica $\mp q$ alle cariche immagine al centro, $\pm Q$ rispettivamente. Il potenziale delle sfere è dato al primo ordine di a/d da

$$\phi_\pm(a) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\pm(Q-q)}{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{\pm Q}{a}\left(1 - \frac{a}{d}\right) \tag{15}$$

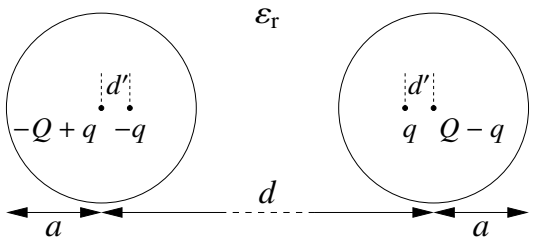


Figura 1:

da cui

$$Q = \frac{2\pi\varepsilon a V_0}{[1-(a/d)]} \ . \tag{16}$$

Per la corrente si trova, dato che la carica totale sulla sfera è ancora Q,

$$I = \frac{\sigma}{\varepsilon} Q = \frac{2\pi a\sigma}{1-a/d} V_0 \tag{17}$$

da cui $R = (1-a/d)/2\pi a\sigma$. Il tempo di scarica rimane invariato.

2

a) Per la condizione di piccolezza della spira il campo magnetico su di essa può essere scritto come $\mathbf{B}(x,t) \simeq \mathbf{B}_0 \cos\omega t$ con $\mathbf{B}_0$ che forma un angolo $\pi/2-\theta$ con la superficie della spira. In funzione del campo elettrico abbiamo $B_0 = E_0/c$. Per la forza elettromotrice indotta nella spira, $\mathcal{E}$, abbiamo quindi

$$RI \ = \ \mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi(\mathbf{B})}{\mathrm{d}t} \simeq -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}(\pi a^2 B_0 \sin\theta\cos\omega t) \ , \tag{18}$$

da cui ricaviamo per la corrente I che circola nella spira

$$I \ = \ +\frac{\pi a^2 \omega B_0 \sin\theta}{R} \sin\omega t \ . \tag{19}$$

b) Il momento magnetico della spira dovuto alla corrente (19) vale

$$\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}} = \frac{(\pi a^2)^2 \omega B_0 \sin\theta}{R} \hat{\mathbf{z}} \sin\omega t \ . \tag{20}$$

La spira è quindi soggetta a un momento meccanico $\boldsymbol{\tau}$ dovuto all'interazione del suo momento magnetico con il campo magnetico dell'onda incidente. Abbiamo

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = \frac{(\pi a^2)^2 \omega B_0^2 \sin\theta\cos\theta}{R} \hat{\mathbf{z}} \sin\omega t \cos\omega t \tag{21}$$

con valor medio $\langle\boldsymbol{\tau}\rangle = 0$.

c) Per la potenza diffusa abbiamo

$$P_{\mathrm{dif}} = \frac{2k_0}{3c^5} \left\langle |\ddot{m}|^2 \right\rangle = \frac{k_0}{3c^5 R^2} ((\pi a^2)^2 \omega^3 B_0 \sin\theta)^2 \ . \tag{22}$$

Con un po' di algebra e sfruttando il fatto che $Z_0 = (\mu_0/\varepsilon_0)^{1/2}$ ha le dimensioni di una resistenza otteniamo

$$P_{\mathrm{dif}} = \frac{\pi^2}{12} (\pi a^2) \left(\frac{\omega a}{c}\right)^6 \left(\frac{Z_0}{R}\right)^2 I = \frac{\pi^7}{6} (\pi a^2) \left(\frac{a}{\lambda}\right)^6 \left(\frac{Z_0}{R}\right)^2 I \ . \tag{23}$$