

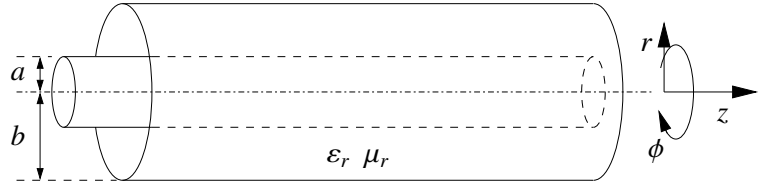
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (02/02/2024)

1

Un cavo coassiale infinito è costituito da un sottile conduttore cilindrico interno di raggio a e da un conduttore cilindrico esterno di raggio $b > a$. Lo spazio tra i conduttori ($a < r < b$) è riempito da un materiale con permittività elettrica ϵ e magnetica μ .



a) Se sui conduttori interno e esterno si trovano rispettivamente le densità di carica lineari $\Delta Q/\Delta z = \pm \ell$ uniformi e costanti, determinare il campo elettrico $\mathbf{E} = E_r(r)\hat{\mathbf{r}}$ all'interno del cavo.

b) Se lungo i conduttori interno ed esterno scorrono rispettivamente le intensità di corrente $\pm I$ uniformi e costanti, determinare il campo magnetico $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\boldsymbol{\phi}}$ all'interno del cavo.

Si assuma ora che lungo i conduttori scorrano le correnti $I = \pm I_0 \cos(kz - \omega t)$. Determinare:

c) la densità di carica (per unità di lunghezza) $\ell = \ell(z, t)$ su ciascun conduttore;

d) i campi elettrico e magnetico all'interno del cavo, mostrando che si possono scrivere come

$$E_r(r, z, t) = E_r(r) \cos(kz - \omega t), \quad B_\phi(r, z, t) = B_\phi(r) \cos(kz - \omega t), \quad (1)$$

dove $E_r(r)$ e $B_\phi(r)$ hanno la stessa forma delle soluzioni in a) e b);

e) la relazione tra ω e k .

2

Un condensatore piano è formato da due armature metalliche parallele e circolari di raggio $a = 1$ cm e distanza relativa $h_0 = 1$ mm tra le quali è mantenuta una differenza di potenziale costante $V_0 = 100$ V. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

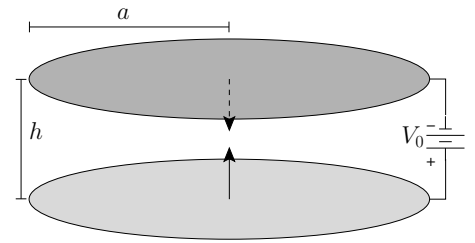
a) Calcolare e stimare numericamente la carica sulle armature e la forza $\mathbf{F}$ tra di esse, e l'energia elettrostatica del sistema.

Rimossi i vincoli meccanici, le armature si avvicinano con legge nota $h = h(t)$ e velocità relativa $v(t) = dh/dt < 0$. Assumendo campi lentamente variabili, Calcolare in funzione di h e v

b) il campo magnetico generato tra le armature,

c) il flusso Φ_s del vettore di Poynting $\mathbf{S}$ sulla superficie laterale del condensatore.

d) Verificare le uguaglianze



$$-2 \frac{dU_{\text{es}}}{dt} = \Phi_S = W_{\text{gen}}, \quad (2)$$

dove W_{gen} è la potenza erogata dal generatore di tensione.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$c = 3 \times 10^8 \text{ m/s} , \quad \varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad (3)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (4)$$

Equazione di continuità per la carica elettrica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 . \quad (5)$$

Equazioni dell'elettrostatica di un mezzo materiale lineare con permittività dielettrica ε

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{lib}} , \quad \nabla \times \mathbf{E} = 0 , \quad \mathbf{D} = \varepsilon_0 \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{P}}{\varepsilon_0} \right) = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} . \quad (6)$$

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{lib}} , \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (7)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = 0 , \quad (8)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

SOLUZIONI

a) Per la simmetria cilindrica del sistema il campo elettrico deve essere radiale. Applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale col cavo, avente raggio r (con $a < r < b$) e altezza h otteniamo

$$2\pi r h E_r = \frac{\ell h}{\varepsilon}, \quad E_r = \frac{\ell}{2\pi \varepsilon r}. \quad (9)$$

b) Per simmetria il campo magnetico deve essere azimutale. Dalla legge della circuitazione di Ampère applicata a una circonferenza di raggio r con centro sull'asse abbiamo

$$2\pi r B_\phi = \mu I, \quad B_\phi = \frac{\mu I}{2\pi r}. \quad (10)$$

c) L'equazione di continuità, ovvero la legge di conservazione della carica elettrica, impone la relazione $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui

$$\partial_t \ell = \pm k I_0 \sin(kz - \omega t), \quad \ell = \pm \frac{k}{\omega} I_0 \cos(kz - \omega t). \quad (11)$$

e) I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ hanno la stessa struttura del caso statico, per cui, sfruttando la relazione tra I_0 e $\ell_0 = k I_0 / \omega$,

$$E_r = E_r(r, z, t) = \frac{\ell(z, t)}{2\pi \varepsilon r} = \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi \varepsilon r} \cos(kz - \omega t), \quad (12)$$

$$B_\phi = B_\phi(r, z, t) = \frac{\mu I(z, t)}{2\pi r} = \frac{\mu I_0}{2\pi r} \cos(kz - \omega t). \quad (13)$$

Questi campi soddisfano le leggi di Gauss e di Ampère-Maxwell, ovvero le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ e $(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu(\mathbf{J} + \varepsilon \partial_t \mathbf{E})$.

f) devono soddisfare la legge di Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, che si riduce a $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$, da cui

$$-k \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi \varepsilon r} \sin(kz - \omega t) = -\omega \frac{\mu I_0}{2\pi r} \sin(kz - \omega t) \quad (14)$$

da cui, eliminando i fattori comuni e post $\varepsilon \mu = 1/v^2$, si ottiene

$$k^2 v^2 = \omega^2. \quad (15)$$

2

Indicando con $C_0 = \varepsilon_0 S / h_0$ la capacità del condensatore, la carica e il campo elettrico valgono rispettivamente

$$Q = C_0 V_0 = V_0 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h_0} \simeq 3 \times 10^{-10} \text{ C}, \quad E = \frac{V_0}{h_0} = 10^5 \text{ V/m}. \quad (16)$$

La forza su un'armatura vale $F = \frac{1}{2} Q E$ (il campo esiste solo nello spazio tra le armature), quindi

$$F = V_0^2 \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2 h_0^2} \simeq 1.5 \times 10^{-5} \text{ N}. \quad (17)$$

L'energia elettrostatica del condensatore può essere scritta come vale $U_{\text{es}} = CV^2/2$, quindi nel nostro caso

$$U_{\text{es}} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{2h(t)} V_0^2 \simeq 1.5 \times 10^{-8} \text{ J} . \quad (18)$$

b) Per la simmetria cilindrica del sistema $\mathbf{B}$ ha solo la componente azimutale. All'interno del condensatore $c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \partial_t \mathbf{E}$ da cui, calcolando la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una circonferenza di raggio r coassiale con il sistema e compresa tra le due armature, si ha

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} , \quad (19)$$

da cui

$$2\pi r B = -\frac{\pi r^2}{c^2} \frac{V_0 v(t)}{h^2(t)} , \quad B = -\frac{r}{2c^2} \frac{V_0 v(t)}{h^2(t)} . \quad (20)$$

c) Tra le armature abbiamo sia il campo elettrico uniforme lungo z dato dalla seconda delle (16) che il campo magnetico azimutale dato dalla (20). Essendo $\hat{z} \times \hat{\varphi} = -\hat{r}$, si ha $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\varepsilon_0 c^2 E B \hat{r}$ e in modulo

$$S = S_r = -\varepsilon_0 c^2 E B = \frac{\varepsilon_0 V_0^2 v(t) r}{2h^3(t)} . \quad (21)$$

Se consideriamo il flusso di $\vec{S}$ attraverso una superficie laterale cilindrica di raggio a che racchiude il condensatore, abbiamo

$$\Phi_S = 2\pi a h(t) \frac{\varepsilon_0 V_0^2 v(t) a}{2h^3(t)} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v(t)}{h^2(t)} . \quad (22)$$

d) Si ha

$$\frac{dU_{\text{es}}}{dt} = -\frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v(t)}{2h^2(t)} \quad (> 0) , \quad (23)$$

$$\Phi_S = -2 \frac{dU_{\text{es}}}{dt} \quad (< 0) . \quad (24)$$

Si ha inoltre

$$W_{\text{gen}} = -V_0 I = -V_0 \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2 v(t)}{h^2(t)} = \Phi_s , \quad (25)$$

in accordo col noto risultato $W_{\text{gen}} = -2dU_{\text{es}}/dt$.