

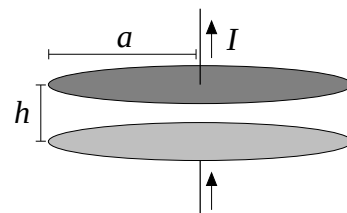
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2011-2012

Compito di Fisica 2 (21/03/2012)

1

Le armature circolari di un condensatore piano, aventi raggio a e poste a distanza h l'una dall'altra, sono connesse a un filo nel quale scorre la corrente oscillante $I = I_0(t) = I_0 \cos \omega t$ mantenuta da un opportuno generatore ideale.

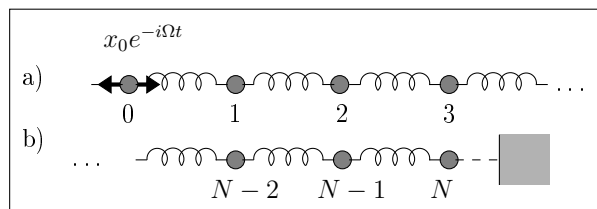


Trascurando ogni effetto ai bordi e utilizzando l'approssimazione di correnti lentamente variabili, calcolare in condizioni di regime

- a) la densità di carica superficiale $\sigma_0 = \sigma_0(t)$ sulle armature e il corrispondente campo elettrico $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(t)$, entrambi assunti uniformi;
- b) il campo magnetico $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_1(r, t)$ generato dalla corrente di spostamento associata a $\mathbf{E}_0$ e la conseguente correzione al campo elettrico $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1(r, t)$, generata per induzione dal campo $\mathbf{B}_1$;
- c) la densità di carica superficiale complessiva sulle armature $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{tot}}(r, t)$, tenendo conto della correzione $\mathbf{E}_1$ e fissando eventuali costanti arbitrarie con la condizione che la corrente attraverso il condensatore sia sempre data da $I_0(t)$.

2

Si consideri una catena di masse identiche m connesse da molle identiche di costante elastica $m\omega_0^2$ e spaziate della distanza a nella posizione di riposo. L'equazione del moto per lo spostamento $x_n = x_n(t)$ dell' n -esima molla, con $n > 1$, è data da



$$\ddot{x}_n = -2\omega_0^2 x_n + \omega_0^2 (x_{n+1} + x_{n-1}), \quad (1)$$

e ammette soluzioni propaganti del tipo $x_n = A e^{ikna - i\omega t}$ se $\omega < 2\omega_0$, con relazione di dispersione data da $\omega = 2\omega_0 |\sin(ka/2)|$ con $|k| < \pi/a$, come si può verificare per sostituzione diretta nella (1). Si assuma che la prima molla ($n = 0$) sia mantenuta in oscillazione secondo la legge $x_0(t) = x_0 e^{-i\Omega t}$ come in figura a).

Si dia l'espressione di $x_n = x_n(t)$ (in funzione di x_0 e Ω), assumendo $\Omega < 2\omega_0$, nei casi di

- a) una catena semi-infinita,
 - b) una catena finita di N masse, con la N -massa in posizione fissa ($x_N = Na$) come in figura b), determinando come varia l'ampiezza di oscillazione in funzione di n e Ω .
 - c) Come si determina la soluzione per una catena finita come in b), ma con la N -massa libera di muoversi, cioè non fissata alla parete?
 - d) Come cambiano (qualitativamente) le risposte ad a) e b) se $\Omega > 2\omega_0$?
- (NB: nei punti c) e d) non è necessario dare la soluzione esplicita, ma si spieghi come si arriva alla soluzione e/o se ne dia la forma generale scrivendo le condizioni che ne determinano le costanti.)

3

Un elettrone si trova in presenza di un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}_0$. Sia $\mathbf{v}$ la velocità dell'elettrone (supposto non relativistico) che si può prendere nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}_0$.

a) Si descriva l'irraggiamento dell'elettrone, specificando la frequenza della radiazione emessa e le condizioni di validità dell'approssimazione di dipolo, specificando se esse dipendono dal valore di $\mathbf{B}_0$. Si dica che polarizzazione ha la radiazione emessa in direzione parallela a $\mathbf{B}_0$ o nel piano perpendicolare a esso, e si dica come si può distinguere dall'analisi della radiazione un elettrone da un positrone.

b) Si dia l'espressione della potenza irradiata e si calcoli in quanto tempo l'elettrone perde l'energia iniziale, giustificando le approssimazioni eventualmente fatte.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Punteggio indicativo: **1a)** 4 **1b)** 6 **1c)** 4 **2a)** 4 **2b)** 4 **2c)** 4 **2d)** 4 **3a)** 7 **3b)** 7

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi\epsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}).$$

Equazione di continuità

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}$$

Rotore in coordinate cilindriche

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \partial_\phi A_z - \partial_z A_\phi \right) \hat{\mathbf{r}} + (\partial_z A_r - \partial_r A_z) \hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{1}{r} (\partial_r (r A_\phi) - \partial_\phi A_r) \hat{\mathbf{z}}$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{r c^2}, \quad t_{\text{rit}} = t - r/c$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2$$

SOLUZIONI

1

a) Se trascuriamo gli effetti ai bordi e assumiamo che il campo elettrico all'interno del condensatore sia uniforme (anche se non costante nel tempo), le due armature hanno densità di carica opposta e il campo $\mathbf{E}_0 = E_0(t)\hat{\mathbf{z}}$ risulta diretto perpendicolarmente alle armature. Ci limitiamo a considerare la densità di carica su una delle armature.

Il teorema di Gauss, applicato ad un'opportuna superficie cilindrica con le basi parallele alle armature e situate una all'esterno e una all'interno del condensatore, fornisce la relazione fra la densità di carica superficiale σ_0 e il campo elettrico $\mathbf{E}_0$:

$$\mathbf{E}_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{\varepsilon_0}. \quad (2)$$

La densità di carica superficiale può essere determinata ricorrendo all'equazione di continuità in forma integrale, applicata ad una superficie cilindrica chiusa S , coassiale al condensatore e contenente una sola delle due armature:

$$\int_S \mathbf{J} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\tilde{S} = - \int_V \dot{\rho} d\tilde{V} \quad (3)$$

dove V è il volume racchiuso da S . Il flusso al primo membro è dato dalla corrente di alimentazione:

$$-I_0 \cos \omega t = -\pi a^2 \frac{d}{dt} \sigma_0(t) \quad (4)$$

da cui ricaviamo, utilizzando la (2):

$$\sigma_0(t) = \frac{I_0}{\pi a^2 \omega} \sin \omega t, \quad E_0(t) = \frac{I_0}{\varepsilon_0 \pi a^2 \omega} \sin \omega t. \quad (5)$$

Alternativamente si può calcolare il campo elettrico mediante l'integrale di linea del potenziale esteso fra le due armature, distanti h :

$$\Delta \phi(t) = - \int_0^h E_0(t) dz = -E_0(t)h. \quad (6)$$

Ricordando che per un condensatore $Q(t) = C \Delta \phi(t)$ e, nel caso in questione, $C = \varepsilon_0 \pi a^2 / h$, otteniamo:

$$E_0(t)h = -\frac{Q(t)}{C} = -\frac{h}{\varepsilon_0 \pi a^2} \int_0^t I_0(\tilde{t}) d\tilde{t} \quad (7)$$

da cui riotteniamo:

$$E_0(t) = \frac{I_0}{\varepsilon_0 \pi a^2 \omega} \sin \omega t \quad (8)$$

e quindi, attraverso la (2), la densità superficiale di carica.

b) In presenza di un campo elettrico t -dipendente, si genera all'interno del condensatore una corrente di spostamento che dà luogo ad un campo magnetico $\mathbf{B}_1$ che soddisfa l'equazione di Maxwell:

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = \mu_0 \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_0. \quad (9)$$

Data la simmetria cilindrica del problema e il fatto che $\mathbf{E}_0$ è uniforme, le linee di forza del campo magnetico sono circonferenze parallele alle armature con centro sull'asse $\hat{\mathbf{z}}$ del condensatore. Integrando la precedente su una linea di campo γ di raggio r ($\mathbf{B}_1$ dipende solo da r) si ottiene:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{B}_1(r, t) \cdot d\mathbf{l} = \frac{1}{c^2} \partial_t \int \mathbf{E}_0(r, t) \cdot d\tilde{\mathbf{S}} \quad (10)$$

da cui si ottiene:

$$\mathbf{B}_1(r, t) = \frac{r}{2c^2} \partial_t E(t) \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{r}{2c^2} \frac{I_0}{\varepsilon_0 \pi a^2} \cos \omega t \hat{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{\mu_0}{2\pi a^2} r I_0(t) \hat{\boldsymbol{\varphi}}. \quad (11)$$

$\mathbf{B}_1$ è dunque azimutale, lineare in r e oscillante nel tempo in fase con la corrente.

Il campo $\mathbf{B}_1$, azimutale, genera per induzione una correzione $\mathbf{E}_1$ al campo $\mathbf{E}_0$, ancora diretta come $\hat{\mathbf{z}}$ e data dall'equazione di Faraday-Neumann:

$$\nabla \times (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1) = \nabla \times \mathbf{E}_1 = -\partial_t \mathbf{B}_1, \quad (12)$$

posto che $\mathbf{E}_0$ è irrotazionale, essendo uniforme. Integriamo la precedente su un cammino γ_1 rettangolare, compreso fra le armature del condensatore e, radialmente, fra $r = 0$ e r :

$$\oint_{\gamma_1} \mathbf{E}_1(r, t) \cdot d\mathbf{l} = -\partial_t \int \mathbf{B}_1(r, t) \cdot d\tilde{\mathbf{S}}, \quad (13)$$

da cui si ottiene:

$$[-E_1(r, t) + E_1(0, t)] h = -\frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} \partial_t (\cos \omega t) h \int_0^r \tilde{r} d\tilde{r}, \quad (14)$$

e infine:

$$E_1(r, t) = E_1(0, t) - \frac{\mu_0 I_0}{4\pi} \frac{\omega r^2}{a^2} \sin \omega t. \quad (15)$$

dove $E_1(0, t)$ è un'opportuna costante (rispetto a r) da determinare in base a qualche ulteriore condizione. Il campo elettrico complessivo all'interno del condensatore è dunque:

$$\mathbf{E}_{\text{tot}} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_1 = \left[E_1(0, t) + \frac{I_0}{\varepsilon_0 \pi a^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \right) \right] \hat{\mathbf{z}}. \quad (16)$$

massimo al centro dell'armatura e decrescente secondo una dipendenza parabolica verso i bordi. La correzione $\mathbf{E}_1$ diviene importante al crescere della frequenza: nell'approssimazione di campi lentamente variabili possiamo trascurare ulteriori correzioni nell'ipotesi che $\omega a/c \ll 1$, ovvero che $a \ll \lambda$.

c) La densità di carica superficiale complessiva si ricava ancora grazie al teorema di Gauss:

$$\sigma_{\text{tot}}(r, t) = \varepsilon_0 E_{\text{tot}}(r, t). \quad (17)$$

Imponendo la condizione che la corrente attraverso il condensatore sia ancora $I_0(t)$, determiniamo il valore della costante $E_1(0, t)$ utilizzando ancora l'equazione di continuità:

$$-I_0 \cos \omega t = -\varepsilon_0 \partial_t \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dr r E_{\text{tot}}(r, t), \quad (18)$$

dove l'integrazione al secondo membro è estesa a tutta l'armatura. Ridefinendo la costante $E_1(0, t)$ in modo opportuno:

$$E_{\text{tot}}(r, t) = \frac{I_0}{\varepsilon_0 \pi a^2} \left[\mathcal{E}_1(0, t) + \frac{\sin \omega t}{\omega} \left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{4c^2} \right) \right], \quad (19)$$

otteniamo:

$$\begin{aligned} I_0 \cos \omega t &= \frac{I_0}{\pi a^2} \partial_t \left[\pi a^2 \left(\mathcal{E}_1(0, t) + \frac{\sin \omega t}{\omega} \right) - \frac{\sin \omega t}{\omega} \frac{\pi \omega^2 a^4}{8c^2} \right] \\ &= I_0 \left[\partial_t \mathcal{E}_1(0, t) + \cos \omega t - \cos \omega t \frac{\omega^2 a^2}{8c^2} \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Semplificando l'espressione e integrandola rispetto al tempo, la soluzione a regime è

$$\mathcal{E}_1(0, t) = \frac{\sin \omega t}{\omega} \frac{\omega^2 a^2}{8c^2}. \quad (21)$$

L'espressione finale per la densità superficiale è la seguente:

$$\sigma_{\text{tot}}(r, t) = \frac{I_0}{\pi a^2} \frac{\sin \omega t}{\omega} \left[1 - \frac{\omega^2}{4c^2} \left(r^2 - \frac{a^2}{2} \right) \right]. \quad (22)$$

2

a) Essendo la catena semi-infinita e non essendoci sorgenti a $n = \infty$, la soluzione è un'onda propagante che soddisfa $x_0(t) = x_0 e^{-i\Omega t}$ e la relazione di dispersione, ovvero

$$x_n = x_0 e^{iKna - i\Omega t}, \quad K = \frac{2}{a} \arcsin \left(\frac{\Omega}{2\omega_0} \right). \quad (23)$$

b) La condizione a $n = N$ provoca il comparire di un'onda riflessa, per cui la soluzione sarà della forma

$$x_n = A e^{iKna - i\Omega t} + B e^{-iKna - i\Omega t}, \quad (24)$$

con le condizioni $x_0(t) = x_0 e^{-i\Omega t}$ e $x_N(t) = 0$, da cui

$$A + B = x_0, \quad A e^{iKNa} + B e^{-iKNa} = 0. \quad (25)$$

La soluzione di queste due equazioni è

$$A = + \frac{ix_0}{2} \frac{e^{-iKNa}}{\sin(KNa)}, \quad B = - \frac{ix_0}{2} \frac{e^{+iKNa}}{\sin(KNa)}. \quad (26)$$

Si hanno risonanze ($(A, B) \rightarrow \infty$) se $KNa/\pi = 1, 2, 3, \dots$ ovvero se la frequenza dell'onda è uguale a quella di uno dei modi normali del sistema.

c) La soluzione più generale è ancora quella data in **b)**, ma la condizione al contorno per $n = N$ è diversa. Per determinarla scriviamo l'equazione del moto per l' N -esima massa:

$$\ddot{x}_N = -2\omega_0^2 x_N + \omega_0^2 x_{N-1}. \quad (27)$$

Sostituendo la soluzione generale si ha

$$(2\omega_0^2 - \Omega^2)(Ae^{iKNa} + Be^{-iKNa}) = \omega_0^2(Ae^{iK(N-1)a} + Be^{-iK(N-1)a}), \quad (28)$$

che, insieme alla condizione $A + B = x_0$, determina A e B (omettiamo l'algebra).

d) Se $\Omega > 2\omega_0$ le onde non possono propagarsi e saranno quindi smorzate. La soluzione più generale è del tipo

$$x_n(t) = Ae^{in\pi - \kappa na - i\Omega t} + Be^{in\pi + \kappa na - i\Omega t}. \quad (29)$$

Per la catena semi-infinita, necessariamente $B = 0$ per evitare una soluzione divergente, per cui

$$x_n(t) = x_0 e^{in\pi - \kappa na - i\Omega t}. \quad (30)$$

Per la catena finita, la soluzione è determinata come in **b)** dalle condizioni $x_0(t) = x_0 e^{-i\Omega t}$ e $x_N = 0$, da cui

$$A + B = x_0, \quad Ae^{iN\pi - \kappa Na} + Be^{iN\pi + \kappa Na} = 0. \quad (31)$$

3

a) L'elettrone percorre con pulsazione $\omega_L = eB_0/m_e$ una circonferenza di raggio $r_L = v/\omega_L$. Il verso di girazione è antiorario rispetto alla direzione di $\mathbf{B}_0$. Questo corrisponde ad un momento di dipolo elettrico (se $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$)

$$\mathbf{p} = r_L(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t). \quad (32)$$

La polarizzazione osservata in una certa direzione è parallela alla componente di $\mathbf{p}$ perpendicolare alla direzione. Quindi, nel verso parallelo o antiparallelo a $\mathbf{B}_0$ si osserva una polarizzazione sinistrorsa o destrorsa, rispettivamente, mentre la polarizzazione è lineare nel piano perpendicolare a $\mathbf{B}_0$.

L'approssimazione di dipolo è valida se la dimensione della sorgente $r_L \ll \lambda = 2\pi c/\omega_L$, la lunghezza d'onda della radiazione emessa. Questa condizione si riduce a $v/c \ll 2\pi$, che è indipendente da $\mathbf{B}_0$ e certamente soddisfatta per elettroni non relativistici.

La radiazione emessa da un positrone di uguale energia è identica in tutto (frequenza, distribuzione angolare, potenza irradiata) eccetto che i segni della polarizzazione circolare sono invertiti rispetto al verso di $\mathbf{B}_0$.

b) La potenza emessa è data da

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3} e^2 \omega_L^4 r_L^2 = \frac{2k_0}{3c^3} e^2 \omega_L^2 v^2. \quad (33)$$

Assumendo che il tempo caratteristico di perdita di energia per irraggiamento sia lungo rispetto a $2\pi/\omega_L$, si può considerare la velocità come approssimativamente costante su un periodo di rotazione e scrivere

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_e}{2} v^2 \right) =: -P, \quad (34)$$

da cui si ricava

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{2k_0 e^2 \omega_L^2}{3m_e c^3} v, \quad v(t) = v(0) e^{-t/\tau}, \quad (35)$$

dove

$$\tau = \frac{3m_e c^3}{2k_0 e^2 \omega_L^2} = \frac{3c}{2r_c \omega_L^2} \quad \left(r_c = \frac{k_0 e^2}{m_e c^2} \right). \quad (36)$$