

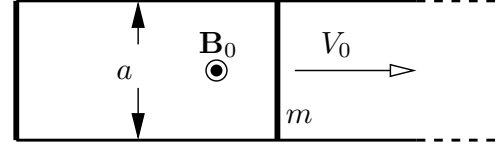
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2020-2021

Compito di Fisica 2 (08/03/2021)

1

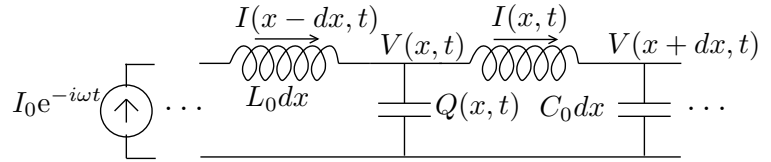
Un circuito rettangolare di resistenza R (supposta costante) ha un lato mobile di lunghezza a e massa m che può scorrere senza attriti lungo guide conduttrici, mantenendo il contatto elettrico. Un campo magnetico costante e uniforme $\mathbf{B}_0$ è perpendicolare al piano del circuito.



- a)** A $t = 0$ il lato ha velocità V_0 . Calcolare la legge oraria del moto e la lunghezza totale percorsa dal lato.
- b)** Supposto che il circuito abbia autoinduttanza costante L , derivare l'equazione del moto del lato mobile e discutere (anche qualitativamente) come cambia la soluzione del punto **a**).

2

Una linea di trasmissione ideale semi-infinita, costituita da due conduttori paralleli, ha induttanza e capacità per unità di lunghezza pari a L_0 e C_0 rispettivamente e resistenza trascurabile. La linea si estende per $x \geq 0$. Lungo la linea si propagano segnali non dispersivi di corrente $I = I(x, t)$ e tensione $V = V(x, t)$.



- a)** Mostrare che valgono le equazioni

$$\partial_x V = -L_0 \partial_t I, \quad C_0 \partial_t V = -\partial_x I, \quad (1)$$

e usarle per ottenere l'equazione d'onda per I e V e il valore della velocità di propagazione v . Considerando poi segnali monocromatici

$$I = \text{Re}(I_0 e^{ikx - i\omega t}), \quad V = \text{Re}(V_0 e^{ikx - i\omega t}), \quad (2)$$

prodotti da un generatore di corrente $I_0(t) = \text{Re}(I_0 e^{-i\omega t})$ posto a $x = 0$, si diano la relazioni tra ω e k e tra V_0 e I_0 .

- b)** Introdotta la densità di energia per unità di lunghezza, mediata sul periodo

$$U = U(x, t) = \frac{1}{2} L_0 \langle I^2 \rangle + \frac{1}{2} C_0 \langle V^2 \rangle, \quad (3)$$

dimostrare, usando le espressioni (2), che si ha $W = Uv$ dove W è la potenza media erogata dal generatore in ingresso.

3

Un elettrone sottoposto a una forza centrale “elastica” $\mathbf{f} = -k\mathbf{r}$ si muove inizialmente su un’orbita circolare di raggio a_0 .

a) Si diano il tipo e la frequenza della radiazione emessa e si calcoli la potenza irradiata.

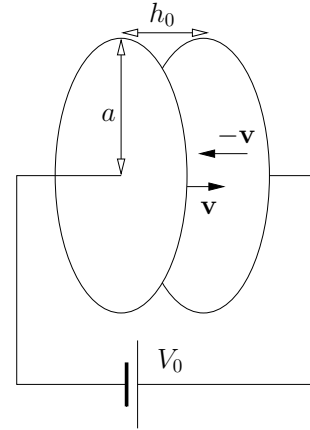
b) Per effetto della perdita d’energia per irraggiamento, si osserva l’elettrone spiraleggiare *lentamente*. Si calcoli la legge oraria di variazione del raggio $a = a(t)$ (con $a(0) = a_0$) e il tempo caratteristico di spiraleggiamento τ giustificando (anche *a posteriori*) eventuali approssimazioni fatte. Si dia una stima di τ se la frequenza della radiazione è dell’ordine di 10^{15} Hz.

4

Tra le due armature circolari di un condensatore piano, aventi raggio a e poste inizialmente a distanza $h_0 \ll a$, un generatore ideale mantiene la d.d.p. costante V_0 . Per $t \geq 0$, le armature vengono avvicinate progressivamente con velocità costanti $+v$ e $-v$. Trascurando gli effetti di bordo, calcolare

a) il campo magnetico generato all’interno del condensatore, nell’approssimazione di correnti lentamente variabili;

b) il flusso del vettore di Poynting attraverso la superficie del condensatore, confrontandolo con la potenza erogata dal generatore.



FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (5)$$

Teorema di conservazione dell’energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (6)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Sia $X = X(t)$ la posizione del lato lungo la guida e $V = V(t) = \dot{X}(t)$ la sua velocità. Il flusso di $\mathbf{B}_0$ attraverso il circuito vale

$$\Phi(t) = B_0 a X(t). \quad (8)$$

Abbiamo quindi

$$RI = \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B_0 a X(t)) = -B_0 a V(t), \quad I = -\frac{B_0 a V(t)}{R}. \quad (9)$$

La forza esercitata dal campo magnetico sul lato mobile vale $\mathbf{f} = B_0 a I \hat{\mathbf{x}}$, da cui

$$m\dot{V} = f = B_0 a I = -\frac{B_0^2 a^2}{R} V, \quad \dot{V} = -\frac{B_0^2 a^2}{Rm} V \quad (10)$$

L'equazione differenziale ha soluzione

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau}, \quad \text{con} \quad \tau = \frac{mR}{(B_0 a)^2}, \quad (11)$$

La lunghezza totale percorsa dal lato vale quindi

$$X(\infty) = \int_0^\infty V(t) dt = V_0 \tau. \quad (12)$$

b) L'induttanza modifica l'equazione (9) per la corrente I ,

$$RI + L\dot{I} = \mathcal{E} = -B_0 a V, \quad (13)$$

mentre si ha sempre la (10) per la velocità V . Derivando la (10) rispetto a t e usando la stessa (10) e la (9) per eliminare I si ottiene

$$\begin{aligned} \ddot{V} &= \frac{B_0 a}{m} \dot{I} = \frac{B_0 a}{mL} (-RI - B_0 a V) = -\frac{B_0 a R}{L} I - \frac{B_0^2 a^2}{mL} V \\ &= -\frac{R}{L} \dot{V} - \frac{B_0^2 a^2}{mL} V, \end{aligned} \quad (14)$$

ovvero l'equazione per un oscillatore armonico smorzato. Il lato mobile quindi si ferma con lo stesso tempo caratteristico del punto **a)** ma con un comportamento oscillante. Fisicamente questo è dovuto al fatto che l'induttanza induce uno sfasamento tra V e I così anche negli istanti in cui $V = 0$ possiamo avere $I \neq 0$ e quindi una forza non nulla.

2

a) Considerando la caduta di potenziale attraverso l'induttanza $L = L_0 dx$ si ha

$$V(x, t) - V(x + dx) = L_0 \partial_t I(x, t) = L_0 dx \partial_t I(x, t), \quad (15)$$

da cui nel limite $dx \rightarrow 0$ si ottiene $L_0 \partial_t I = -\partial_x V$ ovvero la prima delle eq.(1). Consideriamo poi che verso il condensatore di capacità $C = C_0 dx$ posto in posizione x scorre la corrente $I(x - dx, t) - I(x, t)$, per cui

$$I(x - dx, t) - I(x, t) = \partial_t Q(x, t) = \partial_t (CV(x, t)) = \partial_t ((C_0 dx)V(x, t)), \quad (16)$$

e prendendo ancora il limite $dx \rightarrow 0$ si ottiene $C_0 \partial_t V = -\partial_x I$ ovvero la seconda delle eq.(1). Inserendo nelle (1) le eq.(2) ricaviamo $ikV_0 = -i\omega L_0 I_0$.

Prendendo poi le derivate successive delle eq.(1),

$$\partial_x^2 V = \partial_x (-L_0 \partial_t I) = L_0 \partial_t (-\partial_x I) = L_0 \partial_t (C_0 \partial_t V) = L_0 C_0 \partial_t^2 V , \quad (17)$$

$$\partial_x^2 I = \partial_x (-C_0 \partial_t V) = -C_0 \partial_t \partial_x V = -C_0 \partial_t (-L_0 \partial_t I) = L_0 C_0 \partial_t^2 I , \quad (18)$$

da cui le equazioni d'onda

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) I = 0 , \quad \left(\partial_x^2 - \frac{1}{v^2} \partial_t^2 \right) V = 0 , \quad (19)$$

con velocità di propagazione $v = (L_0 C_0)^{1/2}$. Da qui si ottiene inoltre $V_0 = v L_0 I_0 = (L_0 C_0)^{1/2} I_0$.

b) Dato che I_0 e V_0 si possono prendere reali (altrimenti basta inserire il modulo)

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} L_0 I_0^2 + \frac{1}{2} C_0 V_0^2 \right) = \frac{1}{2} L_0 I_0^2 . \quad (20)$$

Mentre

$$W = \langle I(0, t) V(0, t) \rangle = \frac{1}{2} V_0 L_0 = \frac{1}{2} v L_0 I_0^2 = v U \quad (21)$$

3

a) L'orbita circolare viene percorsa con frequenza $\omega = (k/m_e)^{1/2}$, come si può vedere eguagliando la forza elastica alla forza centripeta,

$$-m_e \omega^2 r = -kr , \quad (22)$$

oppure integrando l'equazione del moto $m \ddot{\mathbf{r}} = -k \mathbf{r}$ lungo le componenti x e y per ottenere

$$x = a_0 \cos \omega t , \quad y = a_0 \sin \omega t . \quad (23)$$

La radiazione è di dipolo elettrico con momento $\mathbf{p} = -e \mathbf{r}$ e ha frequenza ω . La potenza irradiata per orbita circolare è data dalla formula di Larmor,

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0 e^2}{3c^3} \omega^4 a_0^2 . \quad (24)$$

b) Supponendo una variazione lenta del raggio $a = a(t)$ usiamo ancora la formula di Larmor con $a_0 \rightarrow a(t)$. L'energia totale è

$$U = \frac{m_e \mathbf{v}^2}{2} + \frac{k \mathbf{r}^2}{2} \simeq \frac{m_e (\omega a)^2}{2} + \frac{m_e \omega^2 a^2}{2} = m_e \omega^2 a^2 . \quad (25)$$

L'equazione per la perdita di energia

$$\frac{dU}{dt} = -P \quad (26)$$

fornisce quindi

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{k_0 e^2}{m_e^2 c^3} \omega^2 a = -\frac{r_c \omega^2}{3c} a , \quad (27)$$

con $r_c = (k_0 e^2 / m_e c^2) = 2.8 \times 10^{-15}$ m. Da qui si ricava che il tempo caratteristico $\tau = (c / r_c \omega^2)$ è dell'ordine di 10^{-7} s. Il fatto che $\tau \gg 2\pi / \omega$ giustifica l'approssimazione di spiraleggiamento lento (l'energia persa per ogni orbita è piccola rispetto all'energia totale).

4

a) Il campo elettrico tra le armature vale $\mathbf{E} = E_0(t)\hat{\mathbf{z}}$ con

$$E_0 = E_0(t) = V_0/h(t) , \quad \text{e} \quad h(t) = h_0 - 2vt \quad (28)$$

Per simmetria $\mathbf{B}$ è azimutale, $\mathbf{B} = B_1(r,t)\hat{\phi}$, e la sua circuitazione su una circonferenza di raggio $r \leq a$ vale

$$2\pi r B_1 = \pi r^2 \frac{1}{c^2} \partial_t E_0 , \quad \text{da cui} \quad B_1 = \frac{rv}{c^2} \frac{V_0}{h^2(t)} , \quad (29)$$

Nota: se si calcola la correzione di secondo ordine ad $\mathbf{E}$ (a meno di costanti)

$$E_2 \propto - \left(\frac{rv}{ch(t)} \right)^2 E_0 , \quad (30)$$

quindi anche per $r \gg h$ la validità dell'approssimazione sarà generalmente garantita da $v \ll c$.

b) Per il vettore di Poynting $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ abbiamo

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 E_0 B_1 \hat{\mathbf{r}} = -\varepsilon_0 E_0^2 \frac{rv}{h(t)} \quad (31)$$

e il suo flusso attraverso la superficie laterale del condensatore vale

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi a h S = -2\pi a^2 \varepsilon_0 E_0^2 v \quad (32)$$

L'energia del condensatore vale

$$U_{es} = \frac{CV_0^2}{2} = \frac{V_o^2}{2} \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h_0 - 2vt} , \quad \text{da cui} \quad \partial_t U_{es} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 V_0^2}{(h_0 - 2vt)^2} v = \varepsilon_0 \pi a^2 E_0^2 v = -\frac{\Phi}{2} , \quad (33)$$

da cui la potenza erogata dal generatore $W = 2\partial_t U_{es} = -\Phi$, perché a tensione costante la variazione di energia del generatore è meno due volte la variazione di energia elettrostatica.