

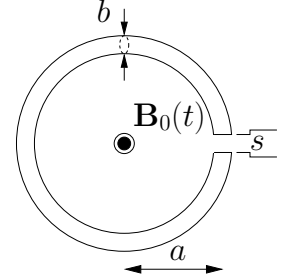
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

Compito di Fisica 2 (09/03/2023)

1

Si consideri un filo di materiale conduttore avente conducibilità σ , lunghezza $2\pi a$ e sezione πb^2 (con $b \ll a$), piegato a formare un anello circolare di raggio a con i capi del filo distanti di $s \ll b$. L'anello è posto in un campo magnetico uniforme oscillante $\mathbf{B}_0(t) = \text{Re}(\mathbf{B}_0 e^{-i\omega t})$ perpendicolare al piano dell'anello. Si assumano simmetria cilindrica e l'approssimazione di correnti lentamente variabili, trascurando la corrente di spostamento.



Si consideri inizialmente il caso $s = 0$ ovvero un anello senza interruzioni.

- Calcolare la corrente I indotta nell'anello e il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ da essa generato al centro dell'anello, trascurando l'autoinduzione; si dia a posteriori una condizione per la validità dell'approssimazione.
- Si discuta per quali valori di ω sono rispettivamente valide le approssimazioni di corrente lentamente variabile e di corrente di spostamento trascurabile. Si diano stime numeriche per $a = 0.1$ m e $b/a = 0.01$ e considerando i casi di rame ($\sigma \simeq 6 \times 10^7$ S/m) e silicio ($\sigma \simeq 1.6 \times 10^{-3}$ S/m).
- Si calcoli ora la corrente indotta I tenendo conto di un coefficiente di autoinduzione L .
- Si consideri ora $s \neq 0$. In queste condizioni si osserva che la corrente indotta ha un comportamento risonante intorno ad una certa frequenza ω_0 . Si spieghi perché.

2

Si consideri la seguente espressione del campo elettrico $\mathbf{E}$ prodotto dalla sovrapposizione di due onde monocromatiche piane di eguale frequenza ω e polarizzazione $\hat{\mathbf{z}}$, ma diversa ampiezza e direzione:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left[\hat{\mathbf{z}} \left(E_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + E_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t} \right) \right], \quad (1)$$

con $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{k}_1 = k(\cos \theta, \sin \theta, 0)$, $\mathbf{k}_2 = k(\cos \theta, -\sin \theta, 0)$ e $k = \omega/c$. Notare che E_1 e E_2 possono essere assunti reali.

- Scrivere l'espressione del campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$.
- Calcolare il vettore di Poynting mediato sul periodo $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle$ discutendo sotto quali condizioni $\mathbf{S}$ è la somma dei vettori di Poynting associati alle due onde.

3

Si consideri il modello di Thomson dell'atomo di Idrogeno nel quale l'elettrone si muove all'interno di una nuvola sferica di raggio a e carica $+e$ uniformemente distribuita nel volume. Determinare

a) la frequenza e la potenza (mediata sul periodo) della radiazione irraggiata per effetto di uno spostamento iniziale dell'elettrone di una lunghezza $\delta(< a)$ rispetto alla propria posizione di equilibrio (con velocità iniziale nulla),

b) il tempo di smorzamento delle oscillazioni dell'elettrone (supposto lungo rispetto al periodo di oscillazione) dovuto alla perdita di energia per irraggiamento.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2. \quad (2)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Campo magnetostatico al centro di una spira circolare di raggio a percorsa dalla corrente I :

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{n}}. \quad (4)$$

Resistenza di un conduttore di lunghezza ℓ , sezione costante A e resistività ρ ovvero conducibilità σ :

$$R = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{\ell}{\sigma A}. \quad (5)$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2. \quad (6)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a)

Trascurando l'autoinduzione, la variazione di $\mathbf{B}_0(t)$ induce un campo elettrico azimutale $\mathbf{E} = E(r, t)\hat{\phi}$. La circuitazione su una linea di forza circolare di raggio a coincidente con l'anello fornisce il campo elettrico nel materiale $E_a \equiv E(r = a, t)$:

$$2\pi a E_a = -\pi a^2 \partial_t B_0 = i\pi a^2 \omega B_0, \quad (8)$$

da cui la densità di corrente

$$J = \sigma E_a = \frac{i}{2} a \omega \sigma B_0, \quad (9)$$

e la corrente totale $I = \pi b^2 J$. Nelle ipotesi fatte, per il campo al centro dell'anello possiamo usare l'espressione magnetostatica

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2a} = \frac{i}{2} \mu_0 \sigma \omega \pi b^2 B_0 = \frac{i \sigma \omega \pi b^2}{\varepsilon_0 c^2} B_0. \quad (10)$$

L'autoinduzione è trascurabile se $B_1 \ll B_0$.

c) L'approssimazione di corrente lentamente variabile richiede che il "ritardo" nella propagazione di un segnale elettromagnetico attraverso l'anello ($\sim a/c$) sia piccola rispetto al periodo di oscillazione di correnti e campi ($\sim 1/\omega$), da cui

$$\omega \ll \frac{c}{a} = 3 \times 10^9 \text{ Hz}. \quad (11)$$

L'approssimazione di corrente di spostamento trascurabile richiede in generale $|\mathbf{J}| \gg |\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}|$. Poichè $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ e, per campi oscillanti, $|\partial_t \mathbf{E}| = \omega |\mathbf{E}|$ otteniamo

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \quad (12)$$

Come ordine di grandezza per i due materiali

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \begin{cases} 10^{19} & (\text{Cu}) \\ 10^8 & (\text{Si}) \end{cases} \text{ Hz}. \quad (13)$$

Quindi la corrente di spostamento è trascurabile a frequenze $\omega < 10^{19}$ Hz (raggi X duri) per Cu e per $\omega < 10^8$ Hz (onde radio) per Si. Quindi per il Si (cattivo conduttore) nell'intervallo $10^8 < \omega < 10^{10}$ le correnti sono lentamente variabili ma la corrente di spostamento domina su quella di conduzione. Per il Cu (ottimo conduttore) in ogni caso pratico la corrente di spostamento è sempre trascurabile.

c) Si può modellizzare il sistema come un circuito RL , con resistenza

$$R = \frac{2\pi a}{\sigma \pi b^2} = \frac{2a}{\sigma b^2}. \quad (14)$$

Si ha

$$\mathcal{E} = -\pi a^2 \partial_t B_0 = RI + L \frac{dI}{dt}, \quad (15)$$

con soluzione $I = \mathcal{E}/(R - i\omega L)$.

e) L'interruzione equivale ad inserire una capacità

$$C = \varepsilon_0 \frac{\pi b^2}{s} . \quad (16)$$

Il sistema si comporta allora come un circuito LC con frequenza di risonanza $\omega_0 = (LC)^{-1/2}$.

2

a) Usando $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ e lavorando direttamente con l'espressione complessa dei campi così che $\partial_t \equiv -i\omega$, otteniamo

$$-i\omega \mathbf{B} = (-\hat{\mathbf{x}}\partial_y + \hat{\mathbf{y}}\partial_x)E_z . \quad (17)$$

Poiché $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} = k(x \cos \theta + y \sin \theta)$ e $\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} = k(x \cos \theta - y \sin \theta)$, otteniamo

$$\mathbf{B} = \left(\hat{\mathbf{x}} \frac{\sin \theta}{c} (E_1 e^{+iky \sin \theta} - E_2 e^{-iky \sin \theta}) - \hat{\mathbf{y}} \frac{\cos \theta}{c} (E_1 e^{+iky \sin \theta} + E_2 e^{-iky \sin \theta}) \right) e^{ikx \cos \theta - i\omega t} . \quad (18)$$

b) Per i campi scritti in notazione complessa

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \text{Re} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*) . \quad (19)$$

Si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\cos \theta}{c} (E_1 e^{+iky \sin \theta} + E_2 e^{-iky \sin \theta}) (E_1^* e^{-iky \sin \theta} + E_2^* e^{+iky \sin \theta}) \\ &\quad + \hat{\mathbf{y}} \frac{\sin \theta}{c} (E_1 e^{+iky \sin \theta} - E_2 e^{-iky \sin \theta}) (E_1^* e^{-iky \sin \theta} - E_2^* e^{+iky \sin \theta}) \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\cos \theta}{c} (|E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1 E_2^* e^{+2iky \sin \theta} + E_1^* E_2 e^{-2iky \sin \theta}) \\ &\quad + \hat{\mathbf{y}} \frac{\sin \theta}{c} (|E_1|^2 - |E_2|^2 - E_1 E_2^* e^{+2iky \sin \theta} + E_1^* E_2 e^{-2iky \sin \theta}) \end{aligned} \quad (20)$$

Poiché

$$E_1 E_2^* e^{+2iky \sin \theta} + E_1^* E_2 e^{-2iky \sin \theta} = 2 \text{Re} [E_1 E_2^* e^{+2ik \sin \theta y}] , \quad (21)$$

$$-E_1 E_2^* e^{+2iky \sin \theta} + E_1^* E_2 e^{-2iky \sin \theta} = -2i \text{Im} [E_1 E_2^* e^{+2ik \sin \theta y}] , \quad (22)$$

si ha

$$\begin{aligned} \text{Re}[\mathbf{E} \times \mathbf{B}^*] &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\cos \theta}{c} (|E_1|^2 + |E_2|^2 + 2E_1 E_2 \cos(2ky \sin \theta)) \\ &\quad + \hat{\mathbf{y}} \frac{\sin \theta}{c} (|E_1|^2 - |E_2|^2) \end{aligned} \quad (23)$$

dove nell'ultimo passaggio si sono assunti E_1 e E_2 reali. Quindi $\langle S_x \rangle$ contiene un termine di modulazione lungo y che mostra la non additività dei vettori di Poynting delle due onde.

3

a) Il campo prodotto dalla sfera di carica positiva al suo interno è

$$\mathbf{E} = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \mathbf{r} = \frac{k_0 e}{a^3} \mathbf{r} . \quad (24)$$

L'elettrone spostato di $\hat{\mathbf{r}}_e = \hat{\mathbf{r}}_e(t)$ rispetto alla posizione d'equilibrio nel centro ($\hat{\mathbf{r}}_e = 0$) soddisfa l'equazione del moto

$$m_e \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r}_e = -e\mathbf{E} = -\frac{k_0 e^2}{a^3} \mathbf{r}_e \equiv m_e \omega^2 \mathbf{r}_e , \quad (25)$$

che, per le condizioni iniziali date, ha per soluzione un'oscillazione armonica

$$\mathbf{r}_e = \boldsymbol{\delta} \cos \omega t . \quad (26)$$

Per lo spostamento dell'elettrone l'atomo acquista un momento di dipolo elettrico oscillante $\mathbf{p}_e = -e\mathbf{r}_e$ ed emette radiazione alla frequenza ω . La potenza totale emessa è

$$P_r = \left\langle \frac{2k_0}{3c^2} |\ddot{\mathbf{p}}_e|^2 \right\rangle = \frac{k_0 e^2}{3c^2} \omega^4 \delta^2 . \quad (27)$$

b) L'energia totale dell'elettrone è

$$U_e = \frac{m_e}{2} \dot{\mathbf{r}}_e^2 + \frac{m_e}{2} \omega^2 \mathbf{r}_e^2 = \frac{m_e}{2} \omega^2 \delta^2 . \quad (28)$$

Si può allora stimare il tempo caratteristico di smorzamento come

$$\tau = \frac{U_e}{P_r} = \frac{3m_e c^3}{k_0 e^2 \omega^2} = \frac{3c}{r_c \omega^2} , \quad (29)$$

dove r_c è il raggio classico dell'elettrone.

Si può anche determinare esplicitamente la legge temporale di smorzamento (nelle ipotesi fatte) come segue. Assumendo $\delta = \delta(t)$, la variazione temporale dell'energia può essere scritta come

$$\frac{dU}{dt} = m_e \omega^2 \delta \frac{d\delta}{dt} . \quad (30)$$

Posto $dU/dt = -P$, otteniamo

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{k_0 e^2}{3m_e c^2} \omega^2 \delta = -\frac{1}{\tau} \delta , \quad (31)$$

che ha come soluzione un decadimento esponenziale $\delta(t) = \delta(0)e^{-t/\tau}$.