

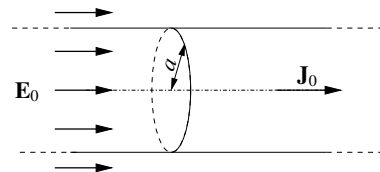
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2023-2024

Compito di Fisica 2 (04/03/2024)

1

Un filo conduttore Ohmico, a sezione cilindrica di raggio a e lunghezza infinita, si trova in un campo elettrico oscillante $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(t) = \text{Re}(E_0 e^{-i\omega t}) \hat{\mathbf{z}}$ parallelo all'asse, così all'interno del filo scorre la corrente uniforme $\mathbf{J}_0 = \sigma \mathbf{E}_0$. Si assuma la validità dell'approssimazione di correnti lentamente variabili.

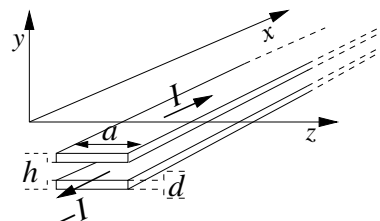


a) Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ nel filo conduttore, tenendo conto sia di $\mathbf{J}_0$ che della corrente di spostamento $\varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}_0$ discutendo per quali frequenze la seconda è trascurabile considerando ad esempi il rame ($\sigma \simeq 6 \times 10^7$ S/m) e il silicio ($\sigma \simeq 1.6 \times 10^{-3}$ S/m).

b) Assumendo che $\partial_t \mathbf{E}_0$ sia trascurabile, calcolare la correzione al campo elettrico $\mathbf{E}_1$ dovuta agli effetti di induzione magnetica indicando a posteriori per quali frequenze $E_1 \ll E_0$ se $a = 1$ mm, considerando in particolare la frequenza di rete $\omega = 2\pi \times 50$ Hz (come condizione al bordo si può assumere $\mathbf{E}_1(r = a, t) = 0$).

2

Una linea di trasmissione è costituita da due strisce infinite parallele poste a distanza h , aventi larghezza $a \gg h$ e spessore $d \ll a$. Lungo le due strisce si propagano segnali monocromatici di corrente $\pm I$ con $I = I(x, t) = \text{Re}(I_0 e^{ikx - i\omega t})$ corrispondente a una densità di corrente uniforme $J_x = I/(ad)$. Gli effetti di bordo sono trascurabili. Calcolare



a) le densità di carica superficiali sulle strisce $\pm\sigma = \pm\sigma(x, t)$,

b) i campi elettrico e magnetico nella regione tra le due strisce, assunti come uniformi, mutuamente perpendicolari e trasversali rispetto alla direzione di propagazione,

c) la relazione tra ω e k ,

d) il flusso di energia $\Phi_{\mathcal{E}}$ lungo la linea (mediato sul periodo di oscillazione) scrivendolo nella forma $\Phi_{\mathcal{E}} = \alpha Z_0 |I_0|^2$ con α coefficiente adimensionale da determinare.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*. Laddove sono richieste risposte numeriche sono sufficienti 1 o 2 cifre significative.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}, \quad c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}, \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2, \quad \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} \equiv Z_0 = 376,3 \, \Omega. \quad (1)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (5)$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)). \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a)

Utilizziamo la notazione complessa scrivendo solo la dipendenza dalle coordinate.

Per la simmetria assiale del sistema si può assumere $\mathbf{B} = B_\phi(r)\hat{\phi}$. Applicando l'equazione di Maxwell-Ampère lungo la circonferenza di raggio r , si ha

$$2\pi r B_\phi = \pi r^2 \mu_0 (J_0 - i\omega \varepsilon_0 E_0) , \quad (7)$$

ovvero

$$B_\phi = \frac{\mu_0}{2} (\sigma - i\omega \varepsilon_0) E_0 r . \quad (8)$$

Si ha $\sigma/\varepsilon_0 \simeq 10^{19} \text{ s}^{-1}$ per Cu e $\sigma/\varepsilon_0 \simeq 10^8 \text{ s}^{-1}$ per Si. Quindi la corrente di spostamento è trascurabile a frequenze $\omega < 10^{19} \text{ s}^{-1}$ (raggi X duri) per Cu e per $\omega < 10^8 \text{ s}^{-1}$ (onde radio) per Si.

b) Si ha per ipotesi $\nabla \times \mathbf{E}_1 = -\partial_t \mathbf{B}$. Assumendo $\mathbf{E}_1 = E_1(r)e^{-i\omega t}\hat{\mathbf{z}}$, si ha

$$-\partial_r E_1 = i\omega B_\phi = \frac{i}{2} \mu_0 \sigma \omega E_0 r , \quad (9)$$

ovvero

$$E_1 = \frac{i}{4} \frac{\sigma \omega}{\varepsilon_0 c^2} (a^2 - r^2) E_0 . \quad (10)$$

La condizione $|E_1| \ll |E_0|$ richiede

$$\omega \ll \frac{4\varepsilon_0 c^2}{\sigma a^2} \approx \begin{cases} 10^4 & (\text{Cu}) \\ 10^{15} & (\text{Si}) \end{cases} \text{ s}^{-1} . \quad (11)$$

Quindi per $\omega = 2\pi \times 50 \text{ s}^{-1}$ (valore della corrente della rete elettrica) e il valore di a scelto l'assunzione $E_1 \ll E_0$ è ben soddisfatta sia per un isolante che per un conduttore. Per quest'ultimo, tuttavia, l'approssimazione tende ad essere violata a raggi e frequenze maggiori di un paio di ordini di grandezza.

2

a) L'equazione di continuità in una sola dimensione spaziale

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J} = -\partial_x J_x . \quad (12)$$

Moltiplicando per la sezione ad e notando che $\rho ad = \sigma a$, otteniamo

$$a \partial_t \sigma = -\partial_x I . \quad (13)$$

Quindi, scrivendo $\sigma = \sigma(x, t) = \text{Re}(\sigma_0 e^{ikx - i\omega t})$, si ha $-i\omega a \sigma_0 = -ik I_0$ ovvero

$$\sigma_0 = \frac{k}{\omega a} I_0 = \frac{I_0}{av_f} , \quad (14)$$

dove $v_f = \omega/k$ è la velocità di fase.

b) Assumendo $\mathbf{E} = E(x, t)\hat{\mathbf{y}}$ con $E(x, t) = \text{Re}(E_0 e^{ikx - i\omega t})$, dal teorema di Gauss si ha $E_0 = \sigma_0/\varepsilon_0 = I_0/(\varepsilon_0 a v_f)$ in analogia col campo in un condensatore piano.

Posto poi $\mathbf{B} = B(x, t)\hat{\mathbf{z}}$ con $B(x, t) = \text{Re}(B_0 e^{ikx - i\omega t})$, calcolando la circuitazione di $\mathbf{B}$ su un cammino rettangolare attraversato dalla corrente I si ottiene $B_0 = \mu_0 I_0/a$.

c) L'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ fornisce l'ulteriore relazione $-i\omega B_0 = -ikE_0$ da cui $E_0 = v_f B_0$. Dato che dalle relazioni ottenute al punto **b)** si ha anche

$$\frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0 v_f} = \frac{c^2}{v_f}, \quad (15)$$

otteniamo $v_f = c^2/v_f$ ovvero

$$\frac{\omega}{k} = v_f = c. \quad (16)$$

d) Il flusso di energia $\Phi_{\mathcal{E}}$ è dato dal flusso medio del vettore di Poynting-Umov

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \varepsilon_0 c^2 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c^2 \text{Re}(E_0 B_0^*) \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E_0|^2 \hat{\mathbf{x}} \\ &= \frac{1}{2} |I_0|^2 \frac{1}{\varepsilon_0 a^2 c} \hat{\mathbf{x}} = \frac{Z_0}{2a^2} |I_0|^2 \hat{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (17)$$

da cui

$$\Phi_{\mathcal{E}} = |\langle \mathbf{S} \rangle|_{ad} = Z_0 |I_0|^2 \frac{d}{2a}. \quad (18)$$