

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2012-2013

Compito di Fisica 2 (15/04/2013)

1

Si consideri un solenoide di lunghezza h e raggio $a \ll h$, avente n spire per unità di lunghezza, nelle quali un generatore ideale mantiene l'intensità costante di corrente I . Gli effetti al bordo sono trascurabili.

a) Si mostri, calcolando direttamente la forza esercitata dal campo magnetico sulle spire, che sulla superficie del solenoide agisce la pressione $P = B_0^2/2\mu_0$ dove $B_0 = \mu_0 nI$ è il campo interno al solenoide.

b) Si calcoli la variazione dell'energia magnetica del solenoide associata a una piccola variazione Δa del raggio.

c) Si calcoli il lavoro compiuto dal generatore per mantenere I costante durante la variazione del raggio come al punto **b)** e si usi il risultato per ottenere nuovamente la pressione del punto **a)**.

(18 punti)

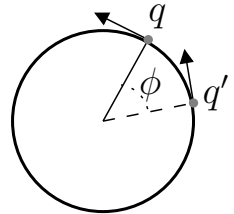
2

Una carica q compie un moto circolare uniforme con velocità $v \ll c$ e raggio a .

a) Si discuta la validità dell'approssimazione di dipolo e si diano la frequenza della radiazione emessa e la potenza irradiata in media su un periodo.

b) Si consideri ora la presenza di un'ulteriore carica q' ruotante con la stessa velocità v ma separata di un angolo di fase ϕ rispetto a q . Considerando i due casi $q' = -q$ e $q' = q$, calcolare la potenza irradiata dal sistema in media su un periodo stabilendo per quali valori di ϕ essa è massima o nulla.

(12 punti)



3

Si consideri un'onda elettromagnetica piana propagantesi nel vuoto lungo la direzione $\hat{\mathbf{x}}$ e avente generica polarizzazione ellittica, il cui campo elettrico può essere scritto come

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} [\epsilon_1 \hat{\mathbf{y}} \cos(kx - \omega t) - \epsilon_2 \hat{\mathbf{z}} \sin(kx - \omega t)] = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \text{Re} [(\epsilon_1 \hat{\mathbf{y}} + i\epsilon_2 \hat{\mathbf{z}}) e^{ikx - i\omega t}] , \quad (1)$$

dove l'ampiezza E_0 e $\epsilon_{1,2}$ sono reali (con $0 \leq \epsilon_{1,2} \leq 1$).

a) Scrivere l'espressione del campo magnetico dell'onda.

b) Scrivere l'espressione del vettore di Poynting $\mathbf{S}$ associato all'onda e calcolarne la media sul periodo $\langle \mathbf{S} \rangle$ mostrando che è indipendente dalla polarizzazione. Per quali valori di $\epsilon_{1,2}$ si ha $\mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle$?

c) L'onda si riflette su uno specchio perfetto e il campo elettrico totale risulta

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \text{Re} [(\epsilon_1 \hat{\mathbf{y}} + i\epsilon_2 \hat{\mathbf{z}})e^{ikx-i\omega t} - (\epsilon_1 \hat{\mathbf{y}} + i\epsilon_2 \hat{\mathbf{z}})e^{-ikx-i\omega t}] . \quad (2)$$

Quanto vale adesso $\langle \mathbf{S} \rangle$?

(12 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B} , \quad (4)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\ell = Id\boldsymbol{\ell}$.

Formula di Larmor per la potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (5)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (6)$$

dove $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (7)$$

Relazioni trigonometriche

$$\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b , \quad \sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b . \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) Consideriamo la formula per la forza su un elemento infinitesimo di circuito $d\mathbf{l}$

$$d\mathbf{f} = I d\mathbf{l} \times \mathbf{B} . \quad (9)$$

Questa, essendo $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$, risulta perpendicolare alla superficie del solenoide e diretta verso l'esterno, cioè il solenoide tende ad espandersi radialmente. Poiché il campo $\mathbf{B}$ è discontinuo (nel limite idealizzato di uno strato di corrente superficiale) prendiamo come valore la media tra il campo B_0 all'interno del solenoide e il campo al di fuori, che è nullo nel limite di lunghezza infinita, quindi $B = B_0/2$. Si ha allora $d\mathbf{f} = IB_0 d\mathbf{l}/2$. Per trovare la forza su un elemento di superficie avente area $dS = dh dl$ osserviamo che esso contiene ndh segmenti di circuito, quindi $dF = (IB_0 dl/2)ndh = (nIB_0/2)dldh = (B_0^2/2\mu_0)dS$, da cui $P = dF/dS = B_0^2/2\mu_0$.

In alternativa si può notare che, usando $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$, si ha $\mathbf{J} \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{r}} (\partial_x B_\phi) B_\phi / \mu_0$ e integrando sullo spessore del solenoide

$$P = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = -\frac{1}{2\mu_0} \int_{a^-}^{a^+} \partial_r B_\phi^2 dr = \frac{B_0^2}{2\mu_0} . \quad (10)$$

b) L'energia magnetica del solenoide può essere calcolata usando la "densità di energia" associata al campo magnetico $u_m = B^2/2\mu_0$. Essendo $B = B_0$ all'interno del solenoide e $B = 0$ fuori, trascurando gli effetti di bordo si ha $U_m = (B_0^2/2\mu_0)\pi a^2 h$. Quindi $\Delta U_m = (B_0^2/\mu_0)\pi h a \Delta a > 0$.

c) La variazione del raggio a a corrente costante induce una variazione del flusso Φ di $\mathbf{B}$ attraverso il solenoide e quindi una forza elettromotrice indotta $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$. Per mantenere la corrente costante il generatore deve sviluppare la potenza $P = -\mathcal{E}I$. Il lavoro compiuto è quindi $W = \int P dt = I \int d\Phi = I \Delta\Phi$ dove la variazione totale del flusso è $\Delta\Phi = \Delta(B_0 \pi a^2 n h) = 2\pi B_0 n h a \Delta a$. Il lavoro è fatto a spese dell'energia interna del generatore che quindi varia di $\Delta U_g = -W = -2\pi n I B_0 h a \Delta a = -2\Delta U_m$. L'energia del sistema varia quindi di $\Delta U_{\text{tot}} = \Delta U_g + \Delta U_m = -\Delta U_m < 0$ così $-\Delta U_{\text{tot}}/\Delta a > 0$ ovvero il solenoide tende a espandersi. La pressione $P = -(\Delta U_{\text{tot}}/\Delta a)/(2\pi a h) = B_0^2/2\mu_0$.

2

a) L'approssimazione di dipolo richiede che le dimensioni della sorgente (quindi il raggio a del problema) siano molto più piccole della lunghezza d'onda della radiazione emessa. Dato che la frequenza di emissione è $\omega = v/a$ (poiché la carica in rotazione può essere vista come una coppia di dipoli oscillanti ortogonali) si ha la condizione $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ che è sempre soddisfatta per $v \ll c$.

Scrivendo il momento di dipolo come $\mathbf{p} = aq(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega t)$ si ottiene in media sul periodo

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} \omega^4 a^2 q^2 (\langle \cos^2 \omega t \rangle + \langle \sin^2 \omega t \rangle) = \frac{2k_0}{3c^3} \omega^4 a^2 q^2 . \quad (11)$$

b) Possiamo scrivere la posizione della seconda carica come $a(\hat{\mathbf{x}} \cos(\omega t - \phi) + \hat{\mathbf{y}} \sin(\omega t - \phi))$ e le componenti x e y del momento di dipolo del sistema risultano quindi, nei due casi

$$p_x = qa (\cos \omega t \mp \cos(\omega t - \phi)) , \quad p_y = qa (\sin \omega t \mp \sin(\omega t - \phi)) . \quad (12)$$

La potenza irradiata risulta proporzionale a $p_x^2 + p_y^2$. Mediando su un periodo si ottiene

$$P = \frac{4k_0}{3c^3} \omega^4 a^2 q^2 (1 \mp \cos \phi) \quad (13)$$

dove si è fatto uso delle formule di addizione e sottrazione

$$\begin{aligned}
& [\cos \omega t \mp \cos(\omega t - \phi)]^2 + [\sin \omega t \mp \sin(\omega t - \phi)]^2 = \\
& = 2 \mp 2 [\cos \omega t \cos(\omega t - \phi) + \sin \omega t \sin(\omega t - \phi)] \\
& = 2 \mp 2 \cos(\omega t - \omega t + \phi) .
\end{aligned}$$

Nel primo caso (cariche opposte) $P = 0$ se $\phi = 0$, che è il caso banale di cariche sovrapposte che si cancellano; nel secondo caso (cariche uguali) $P = 0$ se $\phi = \pi$, ovvero se le cariche si trovano lungo un diametro e il momento di dipolo risultante è nullo.

3

a) Le componenti del campo magnetico in notazione complessa si determinano a partire dall'equazione di Faraday-Neumann

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} = i\omega \mathbf{B} \quad (14)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \mathbf{E} = \frac{i}{\omega} (\hat{\mathbf{y}} \partial_x E_z - \hat{\mathbf{z}} \partial_x E_y) = \frac{k}{\omega} (-\hat{\mathbf{y}} E_z + \hat{\mathbf{z}} E_y) \quad (15)$$

Passando alla parte reale (con $kc = \omega$)

$$\begin{aligned}
\mathbf{B} &= \frac{E_0}{c\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} \text{Re} [(-i\epsilon_2 \hat{\mathbf{y}} + \epsilon_1 \hat{\mathbf{z}}) e^{ikx - i\omega t}] \\
&= \frac{E_0}{c\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} [\epsilon_2 \hat{\mathbf{y}} \sin(kx - \omega t) + \epsilon_1 \hat{\mathbf{z}} \cos(kx - \omega t)] .
\end{aligned} \quad (16)$$

b) Utilizzando l'espressione trovata per il campo magnetico al punto precedente, si ottiene moltiplicando direttamente le espressioni reali dei campi

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \\
&= \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} [\epsilon_1^2 \cos^2(kx - \omega t) + \epsilon_2^2 \sin^2(kx - \omega t)] \hat{\mathbf{x}} .
\end{aligned} \quad (17)$$

La media su un periodo dà in fattore $1/2$ per ogni addendo in parentesi quadre

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} \frac{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}{2} \hat{\mathbf{x}} = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{2} \hat{\mathbf{x}} \quad (18)$$

che risulta indipendente dallo stato di polarizzazione. Quindi $\mathbf{S} = \langle \mathbf{S} \rangle$ (cioè, banalmente, $\mathbf{S}$ è indipendente dal tempo) quando $\epsilon_1 = \epsilon_2$ ossia per polarizzazione circolare.

c) Il campo elettrico si può riscrivere in notazione complessa come

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} [(\epsilon_1 \hat{\mathbf{y}} + i\epsilon_2 \hat{\mathbf{z}}) 2i \sin(kx) e^{-i\omega t}] , \quad (19)$$

mentre il campo magnetico, sempre in notazione complessa, si determina ancora a partire dall'equazione di Faraday-Neumann

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{i}{\omega} (\hat{\mathbf{y}} \partial_x E_z - \hat{\mathbf{z}} \partial_x E_y) \\ &= \frac{2}{c} \frac{E_0}{\sqrt{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2}} [(-i\epsilon_2 \hat{\mathbf{y}} + \epsilon_1 \hat{\mathbf{z}}) \cos(kx) e^{-i\omega t}] .\end{aligned}\tag{20}$$

Il vettore di Poynting mediato su un periodo vale allora

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{S} \rangle &= \varepsilon_0 c^2 \text{Re} \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}^* \right) \\ &= \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{2} \frac{E_0^2}{c(\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2)} 4 \sin(kx) \cos(kx) \text{Re} [(i\epsilon_1 \hat{\mathbf{y}} - \epsilon_2 \hat{\mathbf{z}}) \times (-i\epsilon_2 \hat{\mathbf{y}} + \epsilon_1 \hat{\mathbf{z}})^*] \\ &= \varepsilon_0 c \frac{E_0^2}{\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2} 2 \sin(kx) \cos(kx) \text{Re} [(i\epsilon_1^2 + i\epsilon_2^2) \hat{\mathbf{x}}] \\ &= 0 .\end{aligned}\tag{21}$$

Quindi risulta $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$, come era naturale attendersi data la sovrapposizione di onda incidente e onda riflessa.