

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (09/04/2014)

1

Una corrente superficiale $\mathbf{j} = j\hat{\mathbf{z}}$ scorre lungo uno strato cilindrico di lunghezza infinita, spessore trascurabile e raggio a . L'intensità di corrente totale è $I = 2\pi a j$. Calcolare

- il campo magnetico $\mathbf{B}$ in tutto lo spazio,
- la forza per unità di superficie $\mathbf{P}$ esercitata dal campo magnetico sullo strato di corrente (specificandone il verso, cioè se lo strato di corrente tenda ad espandersi o a collassare),
- la variazione di energia magnetica per unità di lunghezza dU_m associata a un aumento infinitesimo del raggio da . Si spieghi perché $P \neq -(2\pi a)^{-1}dU_m/da$ e come calcolare correttamente P usando il principio dei lavori virtuali.

(15 punti)

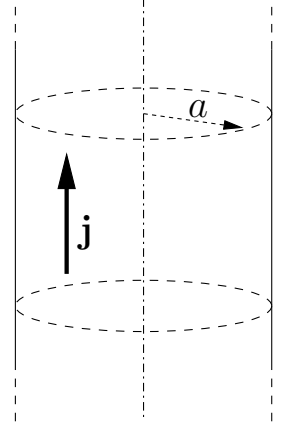


Figura 1: Corrente superficiale su cilindro.

2

Lungo un cavo coassiale si propagano segnali di intensità di corrente $I = I(z, t) = I_0 e^{ikz - i\omega t}$ e densità di carica per unità di lunghezza $\varrho = \varrho(z, t) = \varrho_0 e^{ikz - i\omega t}$ nel conduttore interno (raggio a) e segnali $-I$ e $-\varrho$ nel conduttore esterno (raggio b). La resistenza dei conduttori e le suscettività elettrica e magnetica del mezzo all'interno del cavo sono trascurabili.

- Determinare la relazione tra I_0 e ϱ_0 .
- Mostrare che i campi elettrico e magnetico all'interno del cavo hanno le sole componenti E_r e B_ϕ nella forma

$$\begin{aligned} E_r(r, z, t) &= \frac{A}{r} e^{ikz - i\omega t}, \\ B_\phi(r, z, t) &= \frac{D}{r} e^{ikz - i\omega t}, \end{aligned} \quad (1)$$

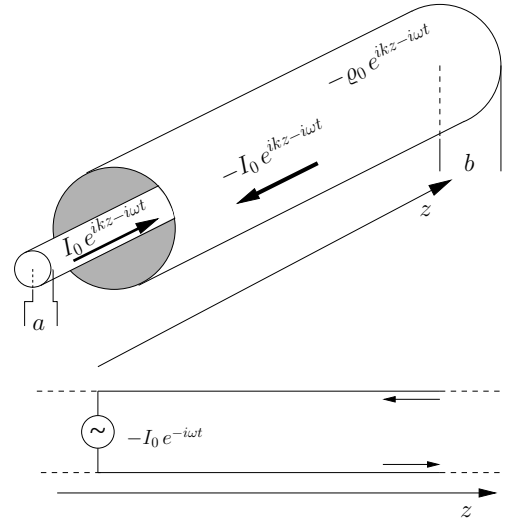


Figura 2: Cavo coassiale.

determinando il valore di A e D , e la relazione tra ω e k .

- Calcolare il vettore di Poynting all'interno del cavo ($a < r < b$) e il suo flusso Φ_s attraverso la sezione del cavo.

- Si assuma che la corrente nel cavo sia prodotta da un generatore di corrente $I = I_0 e^{-i\omega t}$ che connette le due armature a $z = 0$, come mostrato in figura. Calcolare la potenza media sul periodo spesa dal generatore, e confrontarla con Φ_s calcolato al punto c).

(16 punti)

3

Una particella puntiforme di massa m e carica q si muove nel piano xy sotto l'azione di una forza elastica $\mathbf{f} = -m\omega^2\mathbf{r}$ con $\mathbf{r} = (x, y)$. A $t = 0$ si ha $\mathbf{r} = (a, 0)$ e $\dot{\mathbf{r}} = (0, v)$.

a) Si risolva l'equazione del moto e si dia la forma della traiettoria.

b) Si dia la frequenza della radiazione di dipolo elettrico emessa dalla carica e si dica che polarizzazione si osserva lungo gli assi x , y e z . Si trovi una direzione in cui la polarizzazione è circolare.

c) Si assuma che l'orbita sia circolare (per una scelta precisa di a e v) e in questo caso si calcoli con che dipendenza temporale e tempo caratteristico la particella perde energia nell'ipotesi che $dU/dt = -P$, dove U è l'energia totale della particella e P è la potenza irradiata (si assume che la perdita per ciclo dell'orbita sia piccola rispetto al totale).

d) Cosa si può dire sul contributo del termine di dipolo magnetico all'emissione di radiazione?
(16 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x = Id\boldsymbol{\ell} \times \mathbf{B}, \quad (3)$$

dove l'ultima eguaglianza vale per un elemento infinitesimo di circuito di spessore trascurabile per cui $\mathbf{J}d^3x = \mathbf{J}Sd\boldsymbol{\ell} = Id\boldsymbol{\ell}$.

Campi di radiazione di dipolo elettrico e dipolo magnetico

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2}, \quad \mathbf{E}_m = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^3}. \quad (4)$$

dove $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/r$ è la direzione di emissione.

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2. \quad (5)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Per la simmetria del problema le linee di forza di $\mathbf{B}$ devono essere circonferenze con asse coincidente con l'asse della superficie cilindrica su cui scorre la corrente. Dalla legge della circuitazione di Ampère otteniamo per l'interno ($r < a$) e l'esterno ($r > a$) della superficie cilindrica

$$\mathbf{B}(r) = \hat{\phi} \begin{cases} 0 & (r < a) \\ \frac{\mu_0 I}{(2\pi r)} = \mu_0 j \frac{a}{r} & (r > a). \end{cases} \quad (7)$$

b) Su una striscia infinitesima di superficie di ampiezza $a d\phi$ scorre una corrente $dI = ja d\phi$. Su un pezzetto di striscia alto dz agisce una forza

$$d\mathbf{f} = ja d\phi dz \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B} = -jaB d\phi dz \hat{\mathbf{r}} \quad (8)$$

diretta verso l'interno. Per ottenere la forza per unità di superficie $\mathbf{P}$ dobbiamo dividere $d\mathbf{f}$ per la superficie infinitesima $dS = a d\phi dz$, ricordando anche che B è nullo immediatamente sotto all'elemento di superficie, mentre vale $B(a) = \mu_0 j$ immediatamente sopra. Abbiamo così

$$\mathbf{P} = -\frac{1}{2}jB(a)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{2\mu_0}B^2(a)\hat{\mathbf{r}}. \quad (9)$$

c) Se il raggio della superficie cilindrica aumenta di da , tra z e $z + dz$ scompare l'energia magnetica precedentemente contenuta nel volume infinitesimo $2\pi a da dz$, pari a $du = \frac{1}{2\mu_0}B^2(a)2\pi a da dz$, la variazione di energia per unità di lunghezza è così

$$dU_m = -\frac{du}{dz} = -\frac{1}{2\mu_0}B^2(a)2\pi a da. \quad (10)$$

Quindi a una espansione del cilindro corrisponde una diminuzione dell'energia magnetica e, se il sistema fosse isolato, $\mathbf{P}$ dovrebbe essere diretta in modo da far dilatare il cilindro stesso. Ma il sistema non è isolato perché è necessario un generatore per mantenere costante la corrente superficiale. La dilatazione del cilindro provoca una diminuzione del flusso tra z e $z + dz$ pari a $d\Phi' = B(a) da dz$, corrispondente a una diminuzione del flusso per unità di lunghezza $d\Phi = B(a) da$. Il generatore, per mantenere costante la corrente, deve fare il lavoro necessario per compensare la forza elettromotrice per unità di lunghezza $\mathcal{E} = -d\Phi/dt$, fornendo così un'energia per unità di lunghezza

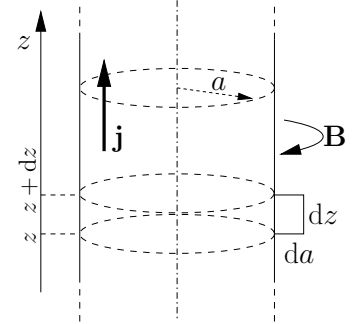


Figura 3: Variazione di flusso.

$$dU_{\text{gen}} = -I d\Phi = 2\pi a j B(a) da = 2\pi a \frac{1}{\mu_0} B^2(a) da = -2 dU_m. \quad (11)$$

Il bilancio complessivo dell'energia per unità di lunghezza è

$$dU_{\text{tot}} = dU_{\text{gen}} + dU_m = -dU_m, \quad (12)$$

e la forza per unità di superficie vale

$$P = -\frac{1}{2\pi a} \frac{dU_{\text{tot}}}{da} = +\frac{1}{2\pi a} \frac{dU_m}{da}. \quad (13)$$

2

a) Dall'equazione di continuità $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial z}$ otteniamo

$$-i\omega \varrho_0 e^{ikz-\omega t} = -ikI_0 e^{ikz-\omega t}, \quad \text{da cui} \quad I_0 = \frac{\omega}{k} \varrho_0 = v_f \varrho_0, \quad (14)$$

dove v_f è la velocità di fase.

b) Per simmetria e per le condizioni alle superfici conduttrici, le linee di forza del campo elettrico devono essere radiali, e le linee di forza del campo magnetico delle circonferenze. Abbiamo cioè campi TEM, analoghi a quelli statici per verso e dipendenza da r

$$E = \frac{\varrho_0}{2\pi\epsilon_0 r} e^{ikz-i\omega t} = \frac{kI_0}{2\pi\epsilon_0\omega r} e^{ikz-i\omega t}, \quad B = \frac{I_0}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} e^{ikz-i\omega t}. \quad (15)$$

L'equazione $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, portando a $k^2/\omega = \omega/c^2$, può essere usata per stabilire che $v_f = \omega/k = c$.

c) Per il vettore di Poynting nello spazio tra i due conduttori abbiamo

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \epsilon_0 c^2 \langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c r^2} \hat{\mathbf{z}}, \quad (16)$$

che ci dà per il flusso di energia attraverso la sezione del cavo

$$\Phi_s = \int_a^b \frac{I_0^2}{8\pi^2 \epsilon_0 c r^2} 2\pi r dr = \frac{I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (17)$$

d) La potenza spesa dal generatore è sempre $\langle VI \rangle$ dove $I = I_0 e^{-i\omega t}$ e V è la differenza di potenziale tra i due conduttori:

$$V = - \int_a^b E(r, 0, t) dr = - \frac{I_0}{2\pi \epsilon_0 c} e^{-i\omega t} \ln \left(\frac{b}{a} \right). \quad (18)$$

Quindi abbiamo

$$\langle VI \rangle = - \frac{I_0^2}{4\pi \epsilon_0 c} \ln \left(\frac{b}{a} \right) = -\Phi_s, \quad (19)$$

e la potenza dissipata dal generatore è uguale al flusso di energia associato al vettore di Poynting.

3

a) Le equazioni del moto lungo gli assi x e y sono rispettivamente

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \quad \text{e} \quad \ddot{y} = -\omega^2 y, \quad (20)$$

che, con le nostre condizioni iniziali, hanno soluzione

$$\mathbf{r} = (x, y) = (a \cos \omega t, b \sin \omega t), \quad \text{con} \quad b = \frac{v}{\omega}, \quad (21)$$

e la traiettoria corrisponde all'ellisse di semiassi a e b di equazione $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$.

b) La frequenza della radiazione di dipolo emessa dalla carica è ω , e la polarizzazione è diretta come la proiezione di $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ nel piano ortogonale alla direzione di osservazione $\hat{\mathbf{n}}$. Quindi la polarizzazione è lineare (lungo $\hat{\mathbf{y}}$) se $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$, lineare (lungo $\hat{\mathbf{x}}$) se $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{y}}$, ed ellittica se $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$. Se $b \leq a$, osservando nel piano xz ad un angolo θ (rispetto a $\hat{\mathbf{z}}$) tale che $\cos \theta = b/a$ si osserva polarizzazione circolare. Se invece $b \geq a$, per osservare una polarizzazione circolare dobbiamo metterci nel piano yz ad un angolo θ (rispetto a $\hat{\mathbf{z}}$) tale che $\cos \theta = a/b$.

c) Abbiamo un'orbita circolare se $a = v/\omega$. In questo caso l'energia totale (cinetica + potenziale) della particella vale

$$U = \frac{m}{2}\mathbf{v}^2 + \frac{m}{2}\omega^2\mathbf{r}^2 = mv^2 . \quad (22)$$

Dalla (5) abbiamo per la potenza totale irradiata

$$P = \frac{2k_0}{3c^3}|\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0q^2}{3c^3}\omega^4\frac{v^2}{\omega^2} = \frac{2k_0q^2}{3c^3}\omega^2v^2 . \quad (23)$$

Differenziando la (22) abbiamo per la dissipazione dell'energia della particella

$$\frac{dU}{dt} = 2mv\frac{dv}{dt} = -\frac{2k_0q^2}{3c^3}\omega^2v^2 , \quad (24)$$

e dividendo per v otteniamo l'equazione

$$2m\frac{dv}{dt} = -\frac{2k_0q^2}{3c^3}\omega^2v , \quad (25)$$

che ha soluzione

$$v = v(0)e^{-t/\tau} , \quad \text{con} \quad \tau = -\frac{3mc^3}{k_0q^2\omega^2} . \quad (26)$$

d) Il momento di dipolo magnetico è costante (è proporzionale al momento angolare orbitale) per cui non contribuisce all'irraggiamento.