

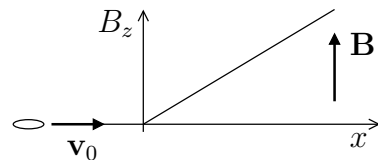
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2014-2015

Compito di Fisica 2 (13/04/2015)

1

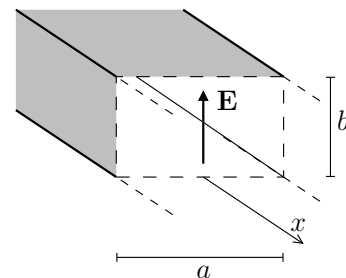
Una piccola spira conduttrice, rigida e circolare avente raggio a , resistenza R e massa M entra con velocità iniziale $\mathbf{v}(0) = v_0 \hat{\mathbf{x}}$ nella regione di spazio $x > 0$ dov'è presente un campo magnetico statico non uniforme $\mathbf{B} = (B_0 x/L) \hat{\mathbf{z}}$ (con $\mathbf{B} = 0$ per $x < 0$). Il campo $\mathbf{B}$ è perpendicolare al piano della spira e si ha $L \gg a$. Determinare per $t > 0$



- la corrente nella spira e la potenza dissipata per effetto Joule,
- la forza sulla spira e la distanza percorsa dalla spira nella regione di campo magnetico.

2

Un'onda elettromagnetica di frequenza ω si propaga lungo $\hat{\mathbf{x}}$ in una guida d'onda a sezione rettangolare con pareti perfettamente conduttrici poste a $y = \pm a/2$ e $z = \pm b/2$. Il campo elettrico ha solo la componente z la cui espressione è data da



$$E_z = E_z(x, y, t) = \text{Re} [E_0 \cos(k_y y) e^{ik_x x - i\omega t}] . \quad (1)$$

- Determinare i valori possibili di k_y e la relazione di dispersione $\omega(k_x)$, discutendo l'esistenza di possibili frequenze di taglio.
- Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}$ dell'onda, il vettore di Poynting $\mathbf{S}$ e la sua media rispetto al periodo. Quanto vale il flusso totale d'energia elettromagnetica attraverso l'intera guida?

3

Una particella di massa m e carica q si muove sul piano xy sotto l'azione di un campo di forze elastiche $\mathbf{f} = -m\omega^2 \mathbf{r}$. A $t = 0$ si ha $\mathbf{r}(0) = (a, 0)$ e $\dot{\mathbf{r}} = (0, v)$.

- Determinare la legge oraria del moto della particella e descriverne l'irraggiamento, specificando la frequenza della radiazione emessa e l'espressione della potenza irradiata.
- Si scelgano le condizioni iniziali in modo che l'orbita della particella sia circolare e si determini, con opportune assunzioni da discutere, la legge temporale con cui la particella perde energia per irraggiamento.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica q

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (3)$$

Vettore di Poynting

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} . \quad (4)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (5)$$

Formula di Larmor per la potenza istantanea emessa da un dipolo $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} \langle \ddot{\mathbf{p}}^2(t) \rangle . \quad (6)$$

SOLUZIONI

1

a) Le dimensioni della spira sono piccole rispetto alla lunghezza L sulla quale il campo magnetico varia in modo apprezzabile: perciò possiamo considerare $\mathbf{B}$ uniforme sulla spira. La spira si muove con velocità $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}dx/dt$ ed è disposta nel piano xy , perciò il flusso magnetico che la attraversa dipende dalla sua posizione $x = x(t)$

$$\Phi(x) = \pi a^2 B_0 \frac{x}{L} . \quad (7)$$

Ne segue che la f.e.m. indotta è, per la legge di Faraday-Neumann

$$\mathcal{E} = -\frac{d}{dt}\Phi(x) = -\pi a^2 B_0 \frac{v}{L} . \quad (8)$$

La corrente indotta $I = \mathcal{E}/R$ scorre in verso orario, rispetto all'asse $\hat{\mathbf{z}}$, per compensare l'aumento di flusso magnetico. La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P_d = RI^2 = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{(\pi a^2 B_0 v)^2}{RL^2} . \quad (9)$$

b) La forza agente sulla spira può essere determinata utilizzando l'equazione $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = -P_d$, da cui si ricava

$$\mathbf{F} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2}{RL^2} \mathbf{v} . \quad (10)$$

La forza ha segno opposto alla velocità, perché si oppone al moto della spira, in virtù della legge di Lenz.

Si può anche notare che, indicato con $\mathbf{m} = \pi a^2 I \hat{\mathbf{z}}$ il momento magnetico della spira,

$$F = -m \partial_x B_z = -(\pi a^2) \left(\pi a^2 B_0 \frac{v}{LR} \right) \frac{B_0}{L} = -\frac{(\pi a^2 B_0)^2}{RL^2} v . \quad (11)$$

La distanza percorsa dalla spira può essere determinata via equazione del moto della spira

$$M \frac{dv}{dt} = -kv \quad (12)$$

dove $k = (\pi a^2 B_0)^2 / (RL^2)$. Integrando nel tempo due volte, otteniamo

$$v(t) = v_0 e^{-kt/M}, \quad x(t) = \frac{Mv_0}{k} (1 - e^{-kt/M}) . \quad (13)$$

La distanza percorsa dalla spira è

$$d = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \frac{Mv_0}{k} = \frac{Mv_0 RL^2}{(\pi a^2 B_0)^2} . \quad (14)$$

2

a) Alla superficie di un conduttore perfetto la componente tangenziale del campo elettrico deve annullarsi. Ne segue che

$$E_z(y = \pm a/2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_y \frac{a}{2} = \frac{\pi}{2} n, \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (15)$$

Abbiamo quindi modi TE individuati da $k_y = \pi n/a$, con n dispari. La relazione di dispersione è data dall'equazione di Helmholtz

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) E_z(y) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_x^2 + \left(\frac{\pi n}{a} \right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad (16)$$

da cui ricaviamo la relazione di dispersione

$$\omega(k_x) = \sqrt{k_y^2 c^2 + \left(\frac{\pi n c}{a} \right)^2}. \quad (17)$$

Le frequenze di taglio sono individuate dalla richiesta che k_x sia reale

$$k_x c = \sqrt{\omega^2 - \left(\frac{\pi n c}{a} \right)^2} = \sqrt{\omega^2 - \omega_t^2} \quad \text{con} \quad \omega_t = \frac{\pi n c}{a}. \quad (18)$$

b) Determiniamo il campo magnetico dell'onda via equazione di Maxwell $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$, ovvero

$$-i\omega \mathbf{B} = (\hat{\mathbf{y}} \partial_x - \hat{\mathbf{x}} \partial_y) E_z \quad (19)$$

da cui

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \frac{iE_0}{\omega} \left[i\hat{\mathbf{y}} k_x \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right) + \hat{\mathbf{x}} \left(\frac{\pi n}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \right] e^{ik_x x - i\omega t} \\ &= \left[i\frac{E_0}{\omega} \left(\frac{\pi n}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \hat{\mathbf{x}} - \frac{E_0}{\omega} k_x \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \hat{\mathbf{y}} \right] e^{ik_x x - i\omega t}. \end{aligned} \quad (20)$$

Passando alle sole parti reali abbiamo

$$\mathbf{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \cos(k_x x - \omega t) \hat{\mathbf{z}}, \quad (21)$$

$$\mathbf{B} = \frac{E_0}{\omega} \left(\frac{\pi n}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \sin(k_x x - \omega t) \hat{\mathbf{x}} - \frac{E_0}{\omega} k_x \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \cos(k_x x - \omega t) \hat{\mathbf{y}}. \quad (22)$$

Il vettore di Poynting per l'onda è

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \varepsilon_0 c^2 (E_z B_x \hat{\mathbf{y}} - E_z B_y \hat{\mathbf{x}}) \quad (23)$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{\omega} \left(\frac{\pi n}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \sin(k_x x - \omega t) \cos(k_x x - \omega t) \hat{\mathbf{y}} + \quad (24)$$

$$+ \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{\omega} k_x \cos^2\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \cos^2(k_x x - \omega t) \hat{\mathbf{x}}. \quad (25)$$

La componente y del vettore di Poynting in media su un periodo è nulla. Perciò

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle \mathbf{S}_x \rangle = \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{\omega} k_x \cos^2\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \langle \cos^2(k_x x - \omega t) \rangle \hat{\mathbf{x}} = \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{2\omega} k_x \cos^2\left(\frac{\pi n y}{a}\right) \hat{\mathbf{x}}. \quad (26)$$

Il calcolo della media fatto in notazione complessa ricorrendo alle formule (5) porta allo stesso risultato

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{2} \text{Re}(E_z B_x^* \hat{\mathbf{y}} - E_z B_y^* \hat{\mathbf{x}}) = \varepsilon_0 c^2 \frac{E_0^2}{2\omega} k_x \cos^2 \left(\frac{\pi n y}{a} \right) \hat{\mathbf{x}}, \quad (27)$$

essendo il primo termine in parentesi nullo perché immaginario puro. Il flusso di energia si propaga esclusivamente lungo $\hat{\mathbf{x}}$ ossia longitudinalmente alla guida ed è dato dalla media su un periodo del vettore di Poynting ora calcolata. In base alla relazione di dispersione la velocità di gruppo è data da

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k_x} = \frac{k_x c^2}{\omega}. \quad (28)$$

Abbiamo infine come flusso di energia attraverso la guida d'onda

$$\int \int \langle S_x \rangle dy dz = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} v_g b \int_{-a/2}^{+a/2} \cos^2 \left(\frac{\pi n y}{a} \right) dy = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{4} a b v_g. \quad (29)$$

3

a) Dall'equazione del moto in due dimensioni $m\ddot{\mathbf{r}} = -m\omega^2 \mathbf{r}$ con le condizioni iniziali date, ricaviamo per le singole componenti

$$x(t) = a \cos(\omega t), \quad y(t) = \frac{v}{\omega} \sin(\omega t). \quad (30)$$

La particella si muoverà lungo una traiettoria ellittica con semiassi a e v/ω . Dal punto di vista dell'irraggiamento abbiamo due dipoli elettrici oscillanti alla stessa frequenza ω in direzioni perpendicolari

$$\mathbf{p}(t) = qa \cos(\omega t) \hat{\mathbf{x}} + q \frac{v}{\omega} \sin(\omega t) \hat{\mathbf{y}}. \quad (31)$$

La radiazione emessa avrà frequenza ω in ogni direzione e la potenza irradiata totale, mediata su un periodo, sarà eguale alla somma dei contributi dei due dipoli oscillanti

$$\langle P \rangle = \frac{2k_0}{3c^3} \left(\frac{\omega^4 q^2 a^2}{2} + \frac{\omega^4 q^2 v^2}{2\omega^2} \right) = \frac{k_0}{3c^3} \omega^4 q^2 \left(a^2 + \frac{v^2}{\omega^2} \right). \quad (32)$$

b) Perché l'orbita sia circolare è sufficiente porre: $v = a\omega$. In tale caso abbiamo un dipolo rotante che irraggia una potenza totale mediata su un periodo

$$\langle P \rangle = \frac{2k_0}{3c^3} \omega^4 q^2 a^2. \quad (33)$$

Per effetto dell'irraggiamento la carica tende a perdere energia secondo la legge $dU/dt = -\langle P \rangle$ e spiraleggia verso il centro della sua orbita secondo una legge $r = r(t)$. Possiamo supporre che la perdita di energia avvenga lentamente, ponendo $\dot{r}/r \ll \omega$, in modo che per ogni periodo l'orbita sia approssimativamente circolare e la velocità angolare quasi costante. L'energia meccanica della particella in un potenziale armonico è

$$U(t) = \frac{1}{2} m v^2(t) + \frac{1}{2} m \omega^2 r^2(t) = m \omega^2 r^2(t), \quad (34)$$

da cui

$$\frac{dU}{dt} = m\omega^2 \frac{dr^2}{dt} = 2m\omega^2 r \frac{dr}{dt} \quad (35)$$

che va eguagliata alla potenza irradiata cambiata di segno e calcolata sull'orbita di raggio r

$$2m\omega^2 r \frac{dr}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} \omega^4 q^2 r^2 . \quad (36)$$

Semplificando e integrando nel tempo otteniamo per il raggio dell'orbita, posto $r(0) = a$

$$r(t) = ae^{-t/\tau} , \quad \text{dove} \quad \tau = 3mc^3/(k_0\omega^2 q^2) . \quad (37)$$

L'energia della particella decresce esponenzialmente secondo la legge

$$U(t) = m\omega^2 a^2 e^{-2t/\tau} . \quad (38)$$