

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (13/04/2016)

1

Si consideri un elettrone atomico classico descritto, in assenza di campi esterni, dall'equazione

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \nu \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{r} = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}(t). \quad (1)$$

Si assuma che a $t = 0$ l'elettrone venga spostato di δ dalla sua posizione di equilibrio (con velocità iniziale nulla) e quindi lasciato oscillare.

Ponendo inizialmente il coefficiente di smorzamento $\nu = 0$, calcolare

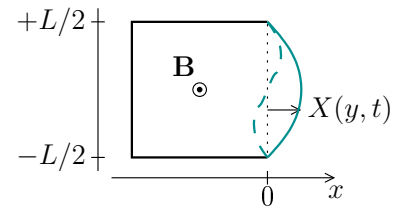
- a) la legge oraria dell'elettrone e la potenza irradiata (in media sul periodo di oscillazione),
- b) il tempo caratteristico τ di perdita di energia per irraggiamento, determinando i valori di ω_0 per cui τ è molto maggiore del periodo di oscillazione.

Assumendo adesso $\nu \neq 0$ ma comunque $\nu < 2\omega_0$,

- c) rispondere nuovamente alla domanda a),
- d) determinare a posteriori un'espressione per ν assumendo che lo smorzamento sia interamente dovuto alla perdita di energia per irraggiamento.

2

Una spira conduttrice quadrata di lato L e resistenza R è immersa in un campo magnetico uniforme $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{z}}$ perpendicolare al piano della spira (xy). Un lato della spira può vibrare con estremi fissi (posti a $y = \pm L/2$) ed è modellizzabile come una corda vibrante avente tensione τ e densità lineare ρ .



- a) Assumendo che l'oscillazione del lato vibrante sia descritta da

$$X = X(y, t) = X_0 s(y) \cos \omega t, \quad X(\pm L/2, t) = 0, \quad (2)$$

dove $X_0 \ll L$, si determinino le espressioni possibili per la funzione $s(y)$ e i corrispondenti valori della frequenza ω .

- b) Si calcoli la corrente indotta nella spira in funzione della frequenza ω e per ogni forma possibile dell'oscillazione.
- c) Stimare il tempo di smorzamento delle oscillazioni usando la conservazione dell'energia.
- d) Calcolare il momento magnetico del circuito e dire quali frequenze si osservano nella radiazione emessa.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Campi di dipolo elettrico e magnetico

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} , \quad \mathbf{E}_m = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{m}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^3} . \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (5)$$

Densità lineare di energia cinetica e potenziale di una corda vibrante con densità lineare ϱ e tensione τ nel limite di piccole oscillazioni $\xi = \xi(x, t)$ (con $\dot{\xi} \equiv \partial_t \xi$ e $\xi' \equiv \partial_x \xi$)

$$k = \frac{\varrho}{2} \dot{\xi}^2(x, t) , \quad u = \frac{\tau}{2} \xi'^2(x, t) . \quad (6)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a)

La soluzione è del tipo

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\delta} \cos \omega_0 t . \quad (8)$$

La potenza irradiata è

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} \langle -e|\dot{\mathbf{r}}|^2 \rangle = \frac{2k_0 e^2}{3c^3} \omega_0^4 \delta^2 \langle \cos^2 \omega_0 t \rangle = \frac{k_0 e^2}{3c^3} \omega_0^4 \delta^2 . \quad (9)$$

b) L'energia totale è $\mathcal{E} = m_e \omega_0^2 \delta^2$, da cui

$$\tau = \frac{\mathcal{E}}{P} = \frac{3m_e c^3}{2k_0 e^2 \omega_0^2} = \frac{3c}{2r_c \omega_0^2} . \quad (10)$$

dove $r_c = (k_0 e^2 / m_e c^2) = 2.82 \times 10^{-15}$ m. La condizione richiesta $\tau \gg \frac{1}{\omega_0}$ impone

$$\omega_0 \ll \frac{c}{r_c} \simeq 10^{23} \text{ s}^{-1} . \quad (11)$$

c) Cercando una soluzione nella forma $\mathbf{r} = \text{Re}(\tilde{\boldsymbol{\delta}} e^{-i\omega t})$ con ω complesso e $\text{Re}(\tilde{\boldsymbol{\delta}}) = \boldsymbol{\delta}$ si ottiene per sostituzione diretta

$$\omega^2 + i\nu\omega - \omega_0^2 = 0 , \quad \omega = (\omega_0^2 - \nu^2/4)^{1/2} - i\nu/2 \equiv \omega_r - i\nu/2 , \quad (12)$$

dove si è assunto $\omega_0 > \nu/2$. La condizione $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$ determina $\text{Im}(\tilde{\boldsymbol{\delta}})$. La soluzione descrive un'oscillazione smorzata. Nel tipico limite $\omega_0 \gg \nu$ si ha $\omega \simeq \omega_0 - i\nu/2$ e la soluzione si può scrivere come

$$\mathbf{r} = \boldsymbol{\delta} e^{-\nu t/2} \cos \omega_0 t . \quad (13)$$

L'energia e la potenza media irradiata sono date da

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \frac{m_e}{2} \langle \dot{\mathbf{r}}^2 + \omega_0^2 \mathbf{r}^2 \rangle = \frac{m_e}{4} \left(\left| -i\omega \tilde{\boldsymbol{\delta}} e^{-i\omega t} \right|^2 + \omega_0^2 \left| \tilde{\boldsymbol{\delta}} e^{-i\omega t} \right|^2 \right) = \frac{m_e}{2} \omega_0^2 |\tilde{\boldsymbol{\delta}}|^2 e^{-\nu t} , \\ P &= \frac{2k_0 e^2}{3c^3} \langle \dot{\mathbf{r}}^2 \rangle = \frac{k_0 e^2}{3c^3} |\omega^2 \tilde{\boldsymbol{\delta}} e^{-i\omega t}|^2 = \frac{k_0 e^2}{3c^3} \omega_0^4 |\tilde{\boldsymbol{\delta}}|^2 e^{-\nu t} . \end{aligned} \quad (14)$$

Si è usato $|\omega| = (\omega_r^2 + \nu^2/4)^{1/2} = \omega_0$.

d) Posto $d\mathcal{E}/dt = -P$ si ottiene

$$\nu = \frac{2r_c \omega_0^2}{3c} = \frac{1}{\tau} . \quad (15)$$

2

a) Posto $v = (\tau/\varrho)^{1/2}$, le soluzioni dell'equazione d'onda per la corda con estremi fissi sono del tipo $X_k = X_0 s_k(y) \cos(\omega_k t)$ con $k = 1, 2, 3, \dots$, $\omega_k = k\pi v/L$, e le funzioni s_k date rispettivamente per k dispari ($k = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$) e k pari ($k = 2n$) da

$$s_{2n+1} = \cos\left((2n+1)\frac{\pi y}{L}\right), \quad s_{2n} = \sin\left(2n\frac{\pi y}{L}\right). \quad (16)$$

b) Il flusso di $\mathbf{B}$ attraverso la superficie della spira è dato dal prodotto del modulo del campo per l'area variabile della spira $A_k(t)$:

$$\Phi_k(\mathbf{B}) = BA_k(t) = BL^2 + B \left(X_0 \int_{-L/2}^{+L/2} s_k(y) dy \right) \cos(\omega_k t). \quad (17)$$

Gli integrali danno rispettivamente per i modi di indice dispari e pari

$$\int_{-L/2}^{+L/2} s_{2n+1}(y) dy = \frac{2}{(2n+1)\pi/L} \sin\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^n \frac{2v}{\omega_{2n+1}}, \quad \int_{-L/2}^{+L/2} s_{2n}(y) dy = 0, \quad (18)$$

per cui

$$A_{2n+1}(t) = L^2 + (-1)^n \frac{2vX_0}{\omega_{2n+1}} \cos(\omega_{2n+1}t), \quad A_{2n}(t) = L^2. \quad (19)$$

La corrente è

$$I_{2n+1}(t) = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_{2n+1}}{dt} = (-1)^n \frac{2vX_0B}{R} \sin(\omega_{2n+1}t), \quad I_{2n}(t) = 0. \quad (20)$$

c)

L'energia della corda vibrante si può scrivere come $\mathcal{E} = K + U$ dove

$$K = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\varrho}{2} \dot{X}^2(y, t) dy, \quad U = \int_{-L/2}^{+L/2} \frac{\tau}{2} X'^2(y, t) dy, \quad (21)$$

da cui per il k -esimo modo

$$\mathcal{E}_k = \frac{\varrho\omega_k^2 L}{4} X_0^2 \sin^2 \omega t + \frac{\tau\omega_k^2 L}{4v^2} X_0^2 \cos^2 \omega t = \frac{\varrho\omega_k^2 L}{2} X_0^2. \quad (22)$$

La potenza dissipata per effetto Joule, in media sul periodo, è

$$P = R \langle I^2 \rangle = \frac{(2vX_0B)^2}{2R} = \frac{2v^2 B^2}{R} X_0^2, \quad (23)$$

indipendentemente dal modo. Il tempo di smorzamento t_d si può allora stimare come

$$t_d = \frac{\mathcal{E}}{P} = \frac{\varrho\omega_k^2 LR}{4B^2 v^2} = \frac{\pi^2 k^2}{4} \frac{\varrho R}{B^2 L^2}. \quad (24)$$

d) Il momento magnetico è perpendicolare al piano della spira e in modulo si può scrivere come

$$m_k = I_k A_k = -\frac{1}{R} \frac{d(BA_k)}{dt} A_k = -\frac{B}{2R} \frac{dA_k^2}{dt}. \quad (25)$$

I campi di radiazione sono proporzionali a $\ddot{m}_{2n+1}$. Quindi i termini non nulli sono proporzionali a $d^3 A_k^2/dt^3$ e la dipendenza quadratica dall'area ci dice che per un'oscillazione generica in cui $A_k \propto \cos(\omega_k t)$ il campo di radiazione conterrà armoniche superiori, cioè sia termini alla frequenza ω_k che $2\omega_k$. Tuttavia, nei limiti di validità della nostra soluzione (ovvero avendo linearizzato l'equazione del moto della corda vibrante) i termini di seconda armonica sono di ordine $\sim (X_0/L)^2$ e quindi trascurabili. Esplicitamente si ha

$$m_{2n+1} = -\frac{B}{2R} \frac{d}{dt} \left(L^4 + 2(-1)^n \frac{2vX_0L^2}{\omega_{2n+1}} \cos(\omega_{2n+1}t) + \mathcal{O}\left(\frac{X_0^2}{L^2}\right) \right). \quad (26)$$