

# Corso di Laurea in Fisica

## Anno Accademico 2016-2017

---

---

### Compito di Fisica 2 (05/04/2017)

---

---

#### 1

Si consideri un condensatore piano con armature circolari di raggio  $a$ , parallele e distanti  $h \ll a$ , aventi rispettivamente la carica  $\pm Q_0$ . Al tempo  $t = 0$  le armature vengono connesse tramite un circuito esterno avente la resistenza  $R$ . Trascurando gli effetti di bordo e usando l'approssimazione di campi lentamente variabili, calcolare all'interno del condensatore

- a) il campo magnetico, all'ordine più basso di approssimazione;
- b) il vettore di Poynting e il flusso di quest'ultimo attraverso una superficie cilindrica di raggio  $r < a$  coassiale al condensatore, verificando il risultato per il flusso dalla conservazione dell'energia;
- c) le correzioni di ordine più basso al campo elettrico statico, discutendo a posteriori l'applicabilità dell'approssimazione di correnti lentamente variabili. (Si scelgano eventuali costanti arbitrarie imponendo che al tempo  $t$  la quantità di carica sulle armature *non* dipenda dall'ordine di approssimazione scelto.)

#### 2

Una particella puntiforme di massa  $m$  e carica  $q$  si muove confinata nel piano  $xy$  sotto l'azione di un campo di forza elastica e anisotropa.

$$\mathbf{f} = -m(\omega_x^2 x, \omega_y^2 y) . \quad (1)$$

- a) Supponendo che a  $t = 0$  la particella abbia posizione  $(x, y) = (a, a)$  e velocità nulla, calcolare il moto per  $t > 0$  e descrivere la radiazione emessa, specificando quante e quali frequenze si osservano in generale, in quale direzione non si osservano alcune frequenze, e l'espressione per la potenza irradiata (mediata su periodi lunghi rispetto all'inverso di ogni frequenza in gioco). Si trascuri lo smorzamento dovuto all'emissione di radiazione.

Si assuma ora che sulla particella incida un'onda piana polarizzata linearmente lingo la bisettrice del piano  $xy$ :

$$\mathbf{E}(z, t) = \text{Re} [E_0(\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}})e^{ikz - i\omega t}] . \quad (2)$$

- b) Trascurando il termine di forza magnetica, dare la soluzione dell'equazione del moto a regime e descrivere la radiazione diffusa dalla particella, specificando quale frequenza si osserva. Si dica anche in quali direzioni, in funzione della frequenza, la potenza irradiata (in media sul periodo) è massima o nulla, rispettivamente.

**NB** Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

# FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (3)$$

Forza di Lorentz su una particella puntiforme di carica  $q$

$$\mathbf{F} = q (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) . \quad (4)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico  $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r c^2} e^{-i\omega t_{\text{rit}}} \quad (5)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico  $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\dot{\mathbf{p}}|^2 , \quad (6)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left( \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (7)$$

dove  $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ .

Operatore rotore in coordinate cilindriche  $(r, \phi, z)$

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)) . \quad (8)$$

# SOLUZIONI

## 1

a) Trascurando gli effetti ai bordi, la capacità di un condensatore a facce piane e parallele di superficie  $S$  e separazione  $h$  è

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}, \quad \text{quindi, nel nostro caso,} \quad C = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{h}, \quad (9)$$

mentre il tempo di scarica è

$$\tau = RC = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2 R}{h}. \quad (10)$$

Nell'approssimazione di campi lentamente variabili, la carica del condensatore decade quindi secondo la legge

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau}, \quad (11)$$

mentre, sempre trascurando gli effetti ai bordi e nell'approssimazione di campi lentamente variabili, il campo tra le armature e la densità superficiale di carica sulle armature stesse valgono

$$E_{0z}(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} e^{-t/\tau} = E_{0z}(0) e^{-t/\tau} \quad \text{dove} \quad \sigma_0 = \frac{Q_0}{\pi a^2}, \quad \text{quindi} \quad E_{0z}(t) = \frac{Q_0}{\varepsilon_0 \pi a^2} e^{-t/\tau}. \quad (12)$$

Per la simmetria del problema, il campo magnetico all'interno del condensatore è azimutale e può essere ottenuto dall'equazione di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$ , che, integrata lungo un percorso circolare di raggio  $r < a$  e coassiale con il condensatore ci dà

$$2\pi r B_{1\phi} = \left( \frac{1}{c^2} \partial_t E_{0z} \right) \pi r^2 = -\pi r^2 \frac{Q_0}{\varepsilon_0 c^2 \pi a^2 \tau} e^{-t/\tau}, \quad \text{da cui} \quad (13)$$

$$B_{1\phi} = \frac{r}{2c^2} \partial_t E_{0z} = -\frac{Q_0 r}{2\varepsilon_0 \pi \tau a^2 c^2} e^{-t/\tau} \quad (14)$$

b) Il vettore di Poynting vale

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = -\frac{\varepsilon_0 r}{2} E_{0z} \partial_t E_{0z} \mathbf{r} = -\frac{\varepsilon_0 r}{4} \partial_t E_{0z}^2 \mathbf{r}, \quad (15)$$

e il suo flusso attraverso una superficie cilindrica di altezza  $h$  e raggio  $r < a$  vale (al flusso contribuisce solo la superficie laterale)

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi r h S(r) = -\pi r^2 h \partial_t \left( \frac{\varepsilon_0}{2} E_{0z}^2 \right) = -\partial_t U_{\text{ES}}, \quad (16)$$

dove  $U_{\text{ES}}$  è l'energia elettrostatica del condensatore.

c) La presenza di un campo magnetico variabile nel tempo  $\mathbf{B}_1$  induce un contributo  $\mathbf{E}_2$  al campo elettrico, dato dall'equazione di Maxwell  $\nabla \times \mathbf{E}_2 = -\partial_t \mathbf{B}_1$ . Per la simmetria del problema abbiamo, in coordinate cilindriche,

$$\partial_r E_{2z} = \partial_t B_{1\phi} = \frac{r}{2c^2} \partial_t^2 E_{0z} = \frac{r}{2\tau^2 c^2} E_{0z}, \quad (17)$$

che, integrata in  $dr$ , ci dà

$$E_{2z}(r) = E_{2z}(0) + \frac{r^2}{4\tau^2 c^2} E_{0z}. \quad (18)$$

che esprime il campo elettrico al secondo ordine all'istante  $t$  in funzione del campo elettrico al primo ordine allo stesso istante. Per il contributo al secondo ordine alla densità di carica abbiamo

$$\sigma_2(r) = \varepsilon_0 E_{2z}(r) , \quad \text{d'altra parte dobbiamo avere} \quad \int_0^a \sigma_2(r) 2\pi r dr \doteq 0 , \quad (19)$$

perché la carica totale delle armature non viene alterata dall'induzione. Il valore del campo elettrico al secondo ordine lungo l'asse del condensatore si ottiene da

$$0 = E_{2z}(0)\pi a^2 - \frac{\pi}{8} \frac{a^4}{\tau^2 c^2} E_{0z} , \quad (20)$$

che porta a

$$E_{2z}(0) = -\frac{a^2}{8\tau^2 c^2} E_{0z} . \quad (21)$$

Le nostre approssimazioni sono valide se  $E_2 \ll E_0$ , ovvero se  $a^2 \ll (c\tau)^2$ .

## 2

a) Trascurando lo smorzamento dovuto all'irraggiamento le equazioni del moto sono

$$m\ddot{x} = -m\omega_x^2 x , \quad m\ddot{y} = -m\omega_y^2 y , \quad (22)$$

che, con le condizioni iniziali  $x(0) = a$  e  $y(0) = a$ , hanno soluzioni

$$x(t) = a \cos(\omega_x t) \quad y(t) = a \cos(\omega_y t) . \quad (23)$$

L'irraggiamento può essere descritto come dovuto a due dipoli elettrici oscillanti ortogonali e indipendenti

$$\mathbf{p}_x(t) = qx(t)\hat{\mathbf{x}} \quad \text{e} \quad \mathbf{p}_y(t) = qy(t)\hat{\mathbf{y}} . \quad (24)$$

Quindi sul piano lungo  $\hat{\mathbf{x}}$  ( $\hat{\mathbf{y}}$ ) si osserva solo la frequenza  $\omega_y$  ( $\omega_x$ ), mentre in qualunque altra direzione si osservano entrambe le frequenze.

Essendo i due dipoli oscillanti ortogonali, le potenze si sommano: la potenza totale emessa "istantanea" è

$$P = \frac{2q^2 a^2}{3c^2} [\omega_x^4 \cos^2(\omega_x t) + \omega_y^4 \cos^2(\omega_y t)] \quad (25)$$

b) In queste condizioni, ponendo  $z = 0$  sul piano delle particelle, le equazioni del moto diventano

$$m\ddot{x} = -m\omega_x^2 x + qE_0 \cos(\omega t) , \quad m\ddot{y} = -m\omega_y^2 y + qE_0 \cos(\omega t) . \quad (26)$$

Trascurando la forza magnetica e cercando soluzioni a regime del tipo  $x = x_0 \cos(\omega t)$  e  $y = y_0 \cos(\omega t)$ , otteniamo per sostituzione nelle (26)

$$x(t) = -\frac{qE_0}{m(\omega^2 - \omega_x^2)} \cos \omega t , \quad y(t) = -\frac{qE_0}{m(\omega^2 - \omega_y^2)} \cos \omega t . \quad (27)$$

Abbiamo un dipolo elettrico che oscilla all'unica frequenza  $\omega$  lungo la direzione del piano che fa un angolo  $\theta$  con l'asse  $x$ , con  $\theta$  dato da

$$\tan \theta = \frac{x(t)}{y(t)} = \frac{\omega^2 - \omega_x^2}{\omega^2 - \omega_y^2} . \quad (28)$$

Lungo questa direzione, che dipende dalla frequenza  $\omega$  dell'onda incidente, non si osserva radiazione, mentre l'emissione massima si osserva lungo qualunque direzione ortogonale alla direzione di oscillazione.