

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (13/04/2018)

1

Una lamina metallica cilindrica ha raggio a , spessore $\delta \ll a$, altezza $h \gg a$, e conducibilità σ . La lamina è immersa in un campo magnetico oscillante $\mathbf{B}_0(t) = B_0 \hat{\mathbf{z}} \cos \omega t$, uniforme e parallelo all'asse della lamina. Si assuma simmetria cilindrica e si usi l'approssimazione di correnti lentamente variabili (CLV), trascurando inoltre la corrente di spostamento. Si ipotizzi che, data la sottigliezza della lamina, il campo elettrico vi penetri.

Determinare all'ordine più basso non nullo nella CLV,

- il campo elettrico $\mathbf{E}$ generato per induzione e la corrente $\mathbf{J}$ nella lamina,
- il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ generato da $\mathbf{J}$, dando *a posteriori* la condizione di validità della CLV.
- Si confronti la soluzione ottenuta in **b)** per il campo totale interno alla lamina $\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ con un calcolo di $\mathbf{B}$ che non usi la CLV, ma sempre trascurando la corrente di spostamento. Si consiglia di usare la notazione complessa, scrivendo il campo applicato nella forma $\tilde{\mathbf{B}}_0 = \hat{\mathbf{z}} B_0 e^{-i\omega t}$.

2

Un cavo coassiale è costituito da due armature cilindriche aventi raggi a e $b > a$. Si consideri la trasmissione lungo il cavo di segnali monocromatici di frequenza ω . In approssimazione di cavo infinito e avente resistenza trascurabile, i campi elettrico e magnetico nella regione di vuoto $a < r < b$ sono dati da

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left[E_a \frac{a}{r} e^{ikz - i\omega t} \hat{\mathbf{r}} \right], \quad \mathbf{B} = \text{Re} \left[B_a \frac{a}{r} e^{ikz - i\omega t} \hat{\phi} \right], \quad (1)$$

con $\omega = kc$.

- a)** Si ottenga B_a in funzione di E_a e si dia l'espressione della corrente totale $I = I(z, t)$ che scorre lungo l'armatura interna (bilanciata da $-I$ nell'armatura esterna).

Si consideri ora un cavo come sopra ma semi-infinito, opportunamente terminato in modo che i campi si propaghino solo per $z \geq 0$. A $z = 0$ le armature sono connesse da un generatore di tensione $V(t) = \text{Re} [V_0 e^{-i\omega t}]$.

- b)** Si dia E_a in funzione di V_0 e si confronti la potenza erogata dal generatore (in media sul periodo) col flusso di energia elettromagnetica lungo il cavo.

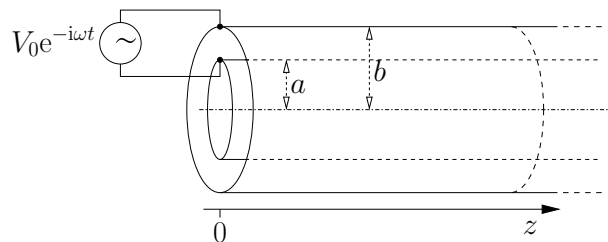


Figura 1

3

Una particella di carica q e massa m si muove nel piano xy sotto l'azione di un campo di forze elastico $\mathbf{f} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$.

a) Si dica brevemente quali informazioni sulla traiettoria della particella possono essere ricavate da una misura dello stato di polarizzazione (lineare, ellittico, circolare) della radiazione emessa lungo $\hat{\mathbf{z}}$. Si mostri anche che da una misura *istantanea* del campo elettrico di radiazione al tempo t e a distanza z si può ricavare l'accelerazione e la posizione della particella a un istante t' , specificando quale.

b) Si assuma ora che a $t = 0$ l'energia totale della particella sia $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(0)$. Considerando sia il caso di traiettoria lineare che circolare, si calcoli la potenza irradiata P (in approssimazione di dipolo elettrico e in media sul periodo) trascurando le perdite per irraggiamento.

c) Si tenga conto adesso delle perdite per irraggiamento determinando l'evoluzione del moto della particella per le stesse condizioni iniziali di **b)** usando l'equazione $d\mathcal{E}/dt = -P$, discutendo le eventuali approssimazioni adottate.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (3)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2. \quad (4)$$

Teorema di conservazione dell'energia ($\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$)

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \quad (5)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (6)$$

Operatore rotore di un vettore $\mathbf{V} = (V_r, V_\phi, V_z)$ in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)). \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Consideriamo una circonferenza di raggio r coassiale con la lamina come in Fig. 2. Il flusso del campo magnetico attraverso la circonferenza è

$$\Phi = \pi r^2 B_0 \cos \omega t \quad (8)$$

indipendentemente dal fatto che sia $r < a$ o $r > a$. Per la simmetria del problema, il campo elettrico avrà simmetria azimutale e sarà

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad \text{da cui} \quad E = \frac{1}{2} r \omega B_0 \sin \omega t. \quad (9)$$

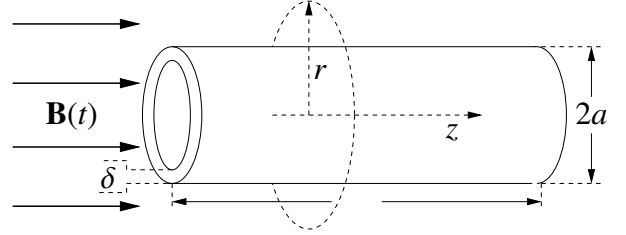


Figura 2

Per la corrente nella lamina, anche essa azimutale, avremo

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}(a) = \frac{1}{2} a \sigma \omega B_0 \sin \omega t \quad (10)$$

b) La lamina è equivalente a un solenoide con prodotto $nI = \delta J$, genera quindi un campo magnetico aggiuntivo longitudinale

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2} \mu_0 \delta a \sigma \omega B_0 \sin \omega t. \quad (11)$$

Il fatto di avere considerato solo il campo magnetico esterno nel flusso delle (8) e (10) è quindi giustificato solo se $|\mathbf{B}_1| \ll |\mathbf{B}_0|$, ovvero

$$\omega \ll \frac{2}{\mu_0 \delta a \sigma}. \quad (12)$$

c) Usiamo una notazione complessa chiamando $\tilde{B}_0 = B_0 e^{-i\omega t}$ il campo applicato, $\tilde{B}_{\text{tot}} = B_{\text{tot}} e^{-i\omega t}$ il campo dentro alla lamina, e $\tilde{E} = E(r) e^{-i\omega t}$ il campo elettrico. I campi magnetici hanno la sola componente z , il campo elettrico la sola componente ϕ . All'interno del solenoide possiamo scrivere, supponendo che anche il contributo della lamina al campo interno sia uniforme

$$\tilde{E} = \frac{i\omega}{2} r \tilde{B}_{\text{tot}}. \quad (13)$$

Dall'equazione di Maxwell per il rotore di $\mathbf{B}$ abbiamo, trascurando la corrente di spostamento, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma \mathbf{E}$, che, data la simmetria del problema, porta a

$$-\partial_r \tilde{B} = \begin{cases} \mu_0 \sigma \tilde{E} & a - \delta < r < a \\ 0 & r < a - \delta \quad \text{e} \quad r > a \end{cases} \quad (14)$$

che comporta una discontinuità di $\tilde{B}$ attraverso la lamina

$$\tilde{B}_{\text{tot}} - \tilde{B}_0 = \mu_0 \sigma \delta \tilde{E}(a) = \frac{i\omega}{2} a \mu_0 \sigma \delta \tilde{B}_{\text{tot}} \quad (15)$$

da cui

$$\tilde{B}_{\text{tot}} \left[1 - \frac{i\omega}{2} a \mu_0 \sigma \delta \right] = \tilde{B}_0 \quad \text{ovvero} \quad \tilde{B}_{\text{tot}} = \frac{2\tilde{B}_0}{2 - i\omega a \mu_0 \sigma \delta} \quad (16)$$

Nel caso che valga la (12) possiamo approssimare

$$\tilde{B}_{\text{tot}} \simeq \tilde{B}_0 + \frac{i}{2} \mu_0 \delta a \sigma \omega \tilde{B}_0 \quad (17)$$

per cui il contributo della lamina al campo magnetico al suo interno è

$$B_1 = \text{Re} \left[\frac{i}{2} \mu_0 \delta a \sigma \omega B_0 e^{-i\omega t} \right] = \frac{1}{2} \mu_0 \delta a \sigma \omega B_0 \sin \omega t . \quad (18)$$

2

a) L'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ applicata alle (1) si riduce a $-i\omega B_\phi = -\partial_z E_r = -ikE_r$, da cui $B_a = (k/\omega)E_a = E_a/c$. (Si può assumere E_a come reale, cosa che facciamo nel seguito per semplicità.)

Dall'equazione $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$, la circuitazione di $\mathbf{B}$ lungo una circonferenza coassiale C di raggio r fornisce

$$2\pi r B_\phi = \int_C \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \mu_0 \int_C \mathbf{J} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \equiv \mu_0 I , \quad (19)$$

(dove $d\boldsymbol{\sigma}$ è l'elemento infinitesimo di superficie vettoriale) essendo $\partial_t \mathbf{E} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = 0$. Quindi

$$I = I(z, t) = \frac{2\pi a}{\mu_0} B_a e^{ikz - i\omega t} = \frac{2\pi a}{\mu_0 c} E_a e^{ikz - i\omega t} . \quad (20)$$

b) Si ha per definizione

$$V(t) = - \int_a^b E(z=0, t) dr = -E_a a \ln(b/a) e^{-i\omega t} , \quad (21)$$

da cui $V_0 = -E_a a \ln(b/a)$. La potenza media spesa dal generatore attraversato dalla corrente $I_0(t) = I(z=0, t)$ è

$$\langle VI \rangle = -\frac{1}{2} \frac{2\pi a^2}{\mu_0 c} \ln(b/a) E_a^2 = -\pi \varepsilon_0 c a^2 \ln(b/a) E_a^2 . \quad (22)$$

Il flusso di energia EM attraverso una superficie è dato dal flusso del vettore di Poynting mediato sul periodo. All'interno del cavo

$$\mathbf{S} = \langle \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_a^2 \frac{a^2}{r^2} \hat{\mathbf{z}} , \quad (23)$$

per cui il flusso di energia sulla sezione del cavo è

$$\Phi(\mathbf{S}) = \int_a^b S(r) 2\pi r dr = \pi \varepsilon_0 c E_a^2 a^2 \int_a^b \frac{1}{r} dr = \pi \varepsilon_0 c E_a^2 a^2 \ln(b/a) = -\langle VI \rangle , \quad (24)$$

in accordo con la conservazione dell'energia.

3

a) Per irraggiamento da un dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$, il campo elettrico in zona di radiazione è proporzionale alla proiezione del dipolo sul piano ortogonale alla direzione di osservazione,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \propto (\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} . \quad (25)$$

Quindi nel caso presente per cui $\ddot{\mathbf{p}} = q\ddot{\mathbf{r}}_{\perp} = -q\omega^2\mathbf{r}_{\perp}$, dove $\mathbf{r}_{\perp} = (x, y)$, e $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$ si ha

$$\mathbf{E}(z, t) \propto q\omega^2\mathbf{r}_{\perp}(t_{\text{rit}}) , \quad (26)$$

ovvero lo stato di polarizzazione è una “mappa” della traiettoria.

Invertendo la relazione si può ottenere l’accelerazione della carica $\ddot{\mathbf{r}}_{\perp}(t')$ al tempo $t' = t - z/c$, da cui la posizione $\mathbf{r}_{\perp}(t') = -\ddot{\mathbf{r}}_{\perp}(t')/\omega^2$.

b), c) Consideriamo la traiettoria lineare $x(t) = a \cos \omega t$, $y(t) = 0$. Usando la formula di Larmor

$$P = k_0 \frac{q^2}{3c^3} \omega^4 a^2 . \quad (27)$$

L’energia è

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2 . \quad (28)$$

Per un moto debolmente smorzato ($P/\omega \ll \mathcal{E}$) si può assumere $a = a(t)$ con $\dot{a} \ll \omega a$ e l’equazione $\dot{\mathcal{E}} = -P$ ha una soluzione esponenziale per $a(t)$:

$$a(t) = a(0)e^{-t/\tau} , \quad \tau = \frac{3mc^3}{k_0 q^2 \omega^2} . \quad (29)$$

Per una traiettoria circolare $x(t) = a \cos \omega t$, $y(t) = a \sin \omega t$ la trattazione è identica perché il sistema è equivalente a due oscillatori ortogonali di stessa frequenza: rispetto al caso lineare, sia P che U sono moltiplicati per 2 e il tempo di smorzamento è identico.