

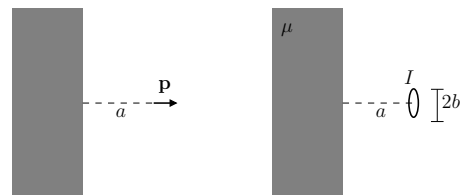
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2017-2018

— Compito di Fisica 2 (15/04/2019) – appello straordinario —

1

a) Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è a distanza a dalla superficie piana di un conduttore infinito e perpendicolare alla superficie stessa. Descrivere la soluzione per il campo elettrico in tutto lo spazio e determinare il verso della forza tra dipolo e piano.

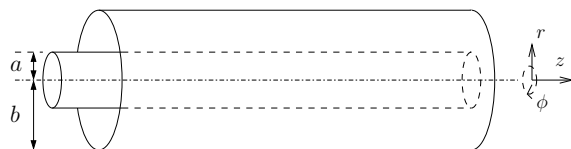


(7 punti)

b) Si consideri ora una spira di raggio b , nella quale è mantenuta la corrente continua I , a distanza $a \gg b$ dalla superficie piana di un mezzo infinito di permeabilità magnetica $\mu = \mu_0 \mu_r$ con $\mu_r \simeq 10^3$, parallelamente alla superficie stessa. Descrivere la soluzione per il campo magnetico in tutto lo spazio e determinare il verso della forza tra spira e piano. (Suggerimento: si può assumere, giustificandolo, che $\mathbf{H} = 0$ nel materiale). (8 punti)

2

Un cavo coassiale (di lunghezza infinita) è costituito da un sottile conduttore cilindrico interno di raggio a e da un conduttore cilindrico esterno di raggio b , con $b > a$.



a) Se sul conduttore interno si trova la densità di carica per unità di lunghezza $\Delta Q / \Delta z = \ell$ uniforme e costante e sul conduttore esterno si trova la densità opposta $-\ell$, determinare il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r})$ all'interno del cavo ($a < r < b$). (4 punti)

b) Se nel conduttore interno scorre l'intensità di corrente I uniforme e costante e nel conduttore esterno scorre l'intensità opposta $-I$, determinare il campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r})$ all'interno del cavo. (4 punti)

Si assuma ora che lungo il conduttore interno si propaghino la corrente $I(z, t) = I_0 \cos(kz - \omega t)$ e la densità di carica per unità di lunghezza $\ell(z, t) = \ell_0 \cos(kz - \omega t)$, mentre lungo il conduttore esterno si propagano la corrente $-I(z, t)$ e la densità di carica $-\ell(z, t)$.

c) Dimostrare che $I_0 = (\omega/k)\ell_0$. (5 punti)

d) Determinare i campi elettrico e magnetico all'interno del cavo, mostrando che essi hanno le sole componenti (modi TEM)

$$E_r(r, z, t) = E_r(r) \cos(kz - \omega t), \quad B_\phi(r, z, t) = B_\phi(r) \cos(kz - \omega t), \quad (1)$$

con $E_r(r)$ e $B_\phi(r)$ soluzioni del problema *statico* con ℓ e I costanti e uniformi, e determinare la relazione tra ω e k . (5 punti)

3

Una particella di carica q e massa m è legata da un capo di forza centrale $\mathbf{F} = -m\omega_0^2 \mathbf{r}$.

a) Assumendo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio a nel piano xy , determinare la frequenza ω della radiazione emessa e la potenza irradiata P_r . (7 punti)

b) Per effetto dell'irraggiamento la carica perde energia: calcolare la variazione temporale del raggio dell'orbita $a = a(t)$ (con $a(0) = a_0$) assumendo che l'energia persa per un periodo di rivoluzione sia piccola rispetto all'energia totale (si dia a posteriori una condizione di validità dell'ipotesi). (8 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Equazione di continuità della carica

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0. \quad (3)$$

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ senza correnti libere

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (4)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (5)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2. \quad (6)$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

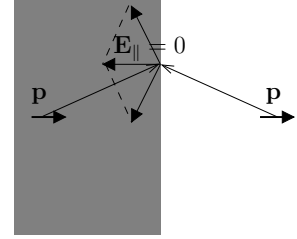
$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)). \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a)

La soluzione si ottiene col metodo delle immagini ponendo un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ uguale al dipolo reale (quindi parallelo e avente *lo stesso verso*) in posizione simmetrica rispetto al piano, in modo che la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla superficie si annulli. La forza tra due dipoli paralleli è attrattiva (come si può dedurre anche da considerazioni elementari) e quindi il dipolo viene attratto dal piano conduttore.



b) Nel limite $\mu_r \rightarrow \infty$, nel materiale si può prendere $\mathbf{H} \simeq 0$ (affinché $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ abbia valore finito) e quindi, per la continuità delle componenti tangenziali di $\mathbf{H}$, alla superficie $\mathbf{H}_{\parallel} = 0$. Dato che nel limite $a \gg b$ la spira si può approssimare con un dipolo magnetico, il problema diviene analogo a quello del punto a) (l'espressione del campo e le condizioni al bordo sono le stesse per $\mathbf{E}$ e $\mathbf{H}$ nei rispettivi casi) ed è quindi risolto ponendo un dipolo immagine uguale a quello reale. Poiché dipoli *paralleli* si attraggono, la forza tra dipolo e piano è attrattiva.

2

a) Per simmetria il campo elettrico deve essere radiale. Applicando il teorema di Gauss a una superficie cilindrica coassiale col cavo, avente raggio r (con $a < r < b$) e altezza h otteniamo

$$2\pi r h E_r = \frac{\ell h}{\varepsilon_0}, \quad E_r = \frac{\ell}{2\pi\varepsilon_0 r}. \quad (8)$$

b) Per simmetria il campo magnetico deve essere azimutale. Dalla legge della circuitazione di Ampère applicata a una circonferenza di raggio r con centro sull'asse abbiamo

$$2\pi r B_\phi = \mu_0 I, \quad B_\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (9)$$

c) L'equazione di continuità, ovvero la legge di conservazione della carica elettrica, impone la relazione $\partial_t \ell = -\partial_z I$, da cui

$$\partial_t \ell = \pm k I_0 \sin(kz - \omega t), \quad \ell = \pm \frac{k}{\omega} I_0 \cos(kz - \omega t), \quad (10)$$

ovvero $\ell_0 = (k/\omega) I_0$.

d) I campi $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ hanno la stessa struttura del caso statico, per cui, sfruttando la relazione tra I_0 e $\ell_0 = k I_0 / \omega$,

$$E_r = E_r(r, z, t) = \frac{\ell(z, t)}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \cos(kz - \omega t), \quad (11)$$

$$B_\phi = B_\phi(r, z, t) = \frac{\mu_0 I(z, t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \cos(kz - \omega t). \quad (12)$$

Questi campi soddisfano le leggi di Gauss e di Ampère-Maxwell, ovvero le equazioni $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$ e $(\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E})$. Inoltre devono soddisfare la legge di Faraday $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}$, che si riduce a $\partial_z E_r = -\partial_t B_\phi$, da cui

$$-k \frac{k}{\omega} \frac{I_0}{2\pi\varepsilon_0 r} \sin(kz - \omega t) = -\omega \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \sin(kz - \omega t) \quad (13)$$

da cui, eliminando i fattori comuni e ricordando che $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, si ottiene

$$k^2 c^2 = \omega^2 . \quad (14)$$

3

a) Per una forza centrale armonica abbiamo $\omega = \omega_0$ indipendentemente da a . L'orbita viene percorsa a velocità $v = a\omega_0$. Il momento di dipolo $\mathbf{p}$ vale

$$\mathbf{p} = qa (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) , \quad (15)$$

quindi

$$\ddot{\mathbf{p}} = -qa\omega_0^2 (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) . \quad (16)$$

Per la potenza irradiata abbiamo

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 \quad (17)$$

che è indipendente dal tempo.

b) L'energia totale è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, che sono uguali

$$U = U_{\text{pot}} + K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 = m \omega_0^2 a^2 . \quad (18)$$

Supponendo che tutta l'energia persa vada in energia irradiata abbiamo

$$P_r = -\frac{dU}{dt} , \quad (19)$$

che, combinata con la (17), ci dà

$$2m\omega_0^2 a \frac{da}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 , \quad (20)$$

ovvero

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_0 q^2 \omega_0^2}{3mc^3} a = -\frac{a}{\tau} , \quad (21)$$

con soluzione $a(t) = a(0) e^{-t/\tau}$: il moto è a spirale, con

$$\tau = \frac{3mc^3}{k_0 q^2 \omega_0^2} . \quad (22)$$

L'approssimazione usata è valida se $\tau \gg 2\pi/\omega_0$, cioè se il tempo di spiraleggiamento è molto lungo rispetto al periodo dell'orbita.