

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018-2019

Compito di Fisica 2 (15/04/2019)

1

a) Una spira circolare di raggio a e resistenza R è mantenuta in rotazione con velocità costante ω all'interno di un solenoide infinito avente raggio $b \gg a$ e n spire per unità di lunghezza nelle quali è mantenuta la corrente costante I . L'asse di rotazione della spira è perpendicolare all'asse del solenoide. Calcolare la corrente indotta nella spira e il momento delle forze necessario a mantenere la spira in rotazione. (6 punti)

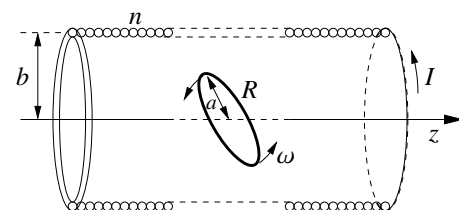


Figura 1

b) Lo stesso solenoide viene disconnesso da ogni generatore di tensione e corrente e al suo interno si introduce un corpo puntiforme dotato di momento magnetico permanente $\mathbf{m}$, mantenuto in rotazione con velocità costante ω attorno ad un asse perpendicolare sia a $\mathbf{m}$ che all'asse del solenoide. Determinare la forza elettromotrice indotta nel solenoide. (7 punti)

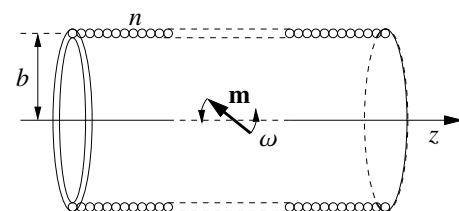
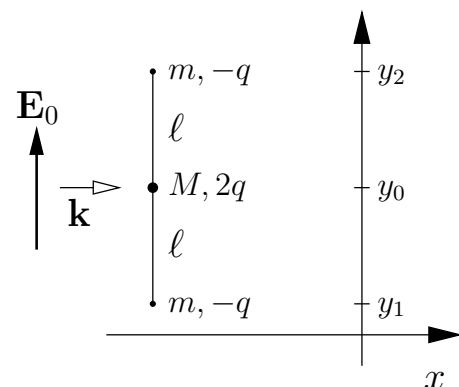


Figura 2

2

Una molecola lineare triatomica simmetrica è schematizzabile (per piccole oscillazioni attorno alla configurazione di equilibrio) come un corpo centrale di massa M e carica $+2q$ legato a due corpi di massa m e carica $-q$ da forze elastiche di costante K (l'interazione coulombiana si intende inclusa nel potenziale elastico) e distanze a riposo ℓ , come in figura. Sulla molecola incide un'onda elettromagnetica monocromatica piana di frequenza ω e ampiezza E_0 , polarizzata linearmente in direzione parallela all'asse della molecola.



a) Mostrare che il momento di dipolo elettrico della molecola è

$$p = -q(y_1 + y_2) \frac{M + 2m}{M}, \quad (1)$$

dove y_1 e y_2 sono le posizioni delle cariche negative e si è preso come origine delle coordinate il centro di massa della molecola. (6 punti)

b) Calcolare la potenza diffusa dalla molecola P_d (mediata sul periodo) evidenziandone la dipendenza dalla frequenza, e la sezione d'urto di diffusione $\sigma_d = P_d/I$ dove I è l'intensità dell'onda incidente. (7 punti)

3

Un condensatore piano ad armature circolari parallele, inizialmente carico, viene cortocircuitato su una resistenza al tempo $t = 0$ cosicché per $t > 0$ il campo elettrico varia come $E_z(t) = E(0)e^{-t/\tau}$ all'ordine più basso nell'approssimazione di correnti lentamente variabili. Calcolare, nell'ambito della stessa approssimazione (da discutere a posteriori),

a) il campo magnetico all'interno del condensatore per $t > 0$, (6 punti)

b) il flusso di energia elettromagnetica attraverso una superficie cilindrica chiusa coassiale e interna al condensatore, verificando il teorema di conservazione dell'energia. (7 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (2)$$

Campo magnetico nel centro di una spira circolare di raggio a , percorsa dalla corrente I :

$$\mathbf{B}_c = \frac{\mu_0 I}{2a} \hat{\mathbf{n}} , \quad (3)$$

dove $\hat{\mathbf{n}}$ è la direzione perpendicolare al piano della spira.

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{r c^2} \quad (4)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (5)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (6)$$

Operatore rotore in coordinate cilindriche (r, ϕ, z)

$$\nabla \times \mathbf{V} = (r^{-1} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi, \partial_z V_r - \partial_r V_z, r^{-1} (\partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r)) . \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Trascurando gli effetti ai bordi il campo magnetico all'interno del solenoide può essere considerato uniforme e vale

$$\mathbf{B} = \mu_0 n I , \quad (8)$$

quindi il flusso attraverso la spira vale

$$\Phi_a(t) = \mu_0 n I \pi a^2 \cos \theta(t) = \mu_0 n I \pi a^2 \cos \omega t = M_{sa}(t) I , \quad (9)$$

dove $\theta(t) = \omega t$ è l'angolo tra l'asse della spira e l'asse del solenoide, e

$$M_{sa}(t) = \mu_0 n \pi a^2 \cos \theta(t) = \mu_0 n \pi a^2 \cos \omega t \quad (10)$$

è il coefficiente di mutua induzione tra solenoide e spira in funzione del tempo. La corrente indotta nella spira vale

$$I_a = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_a}{dt} = \frac{1}{R} \mu_0 n I \pi a^2 \omega \sin \omega t . \quad (11)$$

La potenza istantanea dissipata nella spira per effetto Joule vale

$$P_{\text{diss}} = R I_a^2 = \frac{(\mu_0 n I \pi a^2 \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t . \quad (12)$$

Questa potenza deve essere fornita dal lavoro del momento delle forze che mantengono la spira in rotazione a velocità angolare costante. Abbiamo quindi per il momento delle forze τ

$$\tau(t) \omega = \frac{(\mu_0 n I \pi a^2 \omega)^2}{R} \sin^2 \omega t , \quad \text{da cui} \quad \tau(t) = \frac{(\mu_0 n I \pi a^2)^2 \omega}{R} \sin^2 \omega t , \quad (13)$$

Il momento delle forze si può anche calcolare come

$$\tau = \mathbf{m} \times \mathbf{B} = m B \sin \omega t , \quad (14)$$

dove $\mathbf{m} = \pi a^2 I_a \hat{\mathbf{n}}$ è il momento magnetico della spira ($\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alla superficie della spira).

b) Il campo generato da un momento di dipolo magnetico $\mathbf{m}$ è identico al campo di una piccola spira di raggio a percorsa da una corrente I_1 tale che $\pi a^2 I_1 = m$, cioè $I_1 = m/(\pi a^2)$, a condizione di essere a distanze r dal centro della spira tali che $r \gg a$. Poiché i coefficienti di mutua induzione sono simmetrici, possiamo usare la (10) per calcolare il flusso attraverso il solenoide

$$\Phi_s(t) = M_{sa}(t) I_1 = \mu_0 n \pi a^2 I_1 \cos \omega t = \mu_0 n m \cos \omega t . \quad (15)$$

La forza elettromotrice indotta è allora

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi_s}{dt} = -\mu_0 n \pi a^2 I_1 \omega \sin \omega t . \quad (16)$$

2

a) Scegliamo l'asse y orientato lungo il dipolo, e chiamiamo y_0 la coordinata della carica positiva $2q$, y_1 e y_2 le posizioni delle due cariche negative $-q$. Il momento di dipolo, orientato lungo l'asse y , vale

$$p = \sum_i q_i y_i = -q(y_1 + y_2) + 2qy_0. \quad (17)$$

Per far coincidere l'origine delle y con il centro di massa della molecola dobbiamo avere

$$y_{\text{cm}} = \frac{m(y_1 + y_2) + My_0}{2m + M} = 0, \quad \text{da cui} \quad y_0 = -\frac{m(y_1 + y_2)}{M}, \quad (18)$$

con $y_1 < 0$ e $y_2 > 0$. Con questa scelta delle coordinate il momento di dipolo vale

$$p = -q(y_1 + y_2) - 2q \frac{m(y_1 + y_2)}{M} = -q(y_1 + y_2) \left[1 + 2 \frac{m}{M} \right] = -q(y_1 + y_2) \frac{M + 2m}{M}. \quad (19)$$

b) Le equazioni del moto per le due cariche negative sono

$$\begin{aligned} m\ddot{y}_1 &= -qE_0 \cos \omega t + K(y_0 - y_1 - \ell) \\ m\ddot{y}_2 &= -qE_0 \cos \omega t - K(y_2 - y_0 - \ell), \end{aligned} \quad (20)$$

da cui otteniamo sommando

$$\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 = -\frac{2q}{m} E_0 \cos \omega t - \frac{K}{m} (y_1 + y_2) + 2\frac{K}{m} y_0. \quad (21)$$

Sostituendo per y_0 si ha

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 + \ddot{y}_2 &= -\frac{2q}{m} E_0 \cos \omega t - K \left(\frac{1}{m} + \frac{2}{M} \right) (y_1 + y_2) \\ &= -\frac{2q}{m} E_0 \cos \omega t - \omega_0^2 (y_1 + y_2), \end{aligned} \quad (22)$$

dove abbiamo posto $\omega_0 = \sqrt{K/\mu}$ essendo $\mu = mM/(2m + M)$.

Inserendo nella (19) otteniamo per il momento di dipolo

$$\begin{aligned} -\frac{M}{q(M + 2m)} \ddot{p} &= -\frac{2q}{m} E_0 \cos \omega t + \omega_0^2 \frac{M}{q(M + 2m)} p, \\ \ddot{p} &= \frac{2q^2(M + 2m)}{Mm} E_0 \cos \omega t - \omega_0^2 p. \end{aligned} \quad (23)$$

La soluzione a regime $p = p_0 \cos \omega t$ soddisfa

$$-\omega^2 p_0 \cos \omega t = \frac{2q^2(M + 2m)}{Mm} E_0 \cos \omega t - \omega_0^2 p_0 \cos \omega t, \quad (24)$$

da cui otteniamo

$$p_0 = \frac{2q^2(M + 2m)}{Mm(\omega_0^2 - \omega^2)} E_0. \quad (25)$$

La potenza diffusa (mediata sul periodo) vale

$$P_d = \frac{1}{2} \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{p}(t)|^2 = \frac{k_0}{3c^3} p_0^2 \omega^4 = \frac{k_0}{3c^3} \left(\frac{2q^2(M + 2m)}{Mm} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} E_0^2, \quad (26)$$

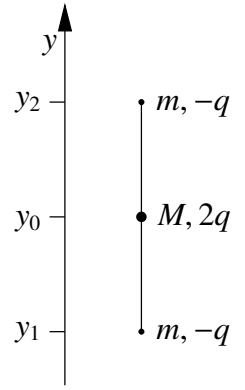


Figura 4

che evidenzia il comportamento risonante a $\omega = \omega_0$. Dato che $I = c\varepsilon_0 E_0^2/2$, si ha

$$\sigma_d = \frac{P_d}{I} = \frac{4}{3\pi} \left(\frac{q^2}{\varepsilon_0 \mu c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} , \quad (27)$$

dove $\mu \equiv Mm/(M + 2m)$. Notare che $(q^2/\varepsilon_0 \mu c^2)$ ha le dimensioni di una lunghezza, come atteso.

3

a) Per simmetria il campo magnetico è solenoidale e calcolandone la circuitazione su una linea di forza si ottiene

$$2\pi r B_\phi = \pi r^2 \frac{1}{c^2} \partial_t E_z , \quad (28)$$

da cui

$$B_\phi = r \frac{1}{2c^2} \partial_t E_z , \quad (29)$$

Il campo B_ϕ induce un campo elettrico

$$E_{1z} \sim r \partial_t B_\phi \sim \frac{r^2}{2c^2} \partial_t^2 E_z . \quad (30)$$

La validità dell'approssimazione richiede $E_{1z} \ll E_z$ ovvero dimensioni del condensatore tali che $r \ll c\tau$.

b) Il vettore di Poynting è, all'ordine più basso

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{2} \partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_z^2 \right) . \quad (31)$$

Il flusso su una superficie cilindrica di raggio r vale quindi

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi r h S = \pi r^2 h \partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_z^2 \right) = \frac{d}{dt} U_{\text{es}} , \quad (32)$$

dove U_{es} è l'energia elettrostatica contenuta nel volume.