

Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2020-2021

Compito di Fisica 2 (26/04/2021)

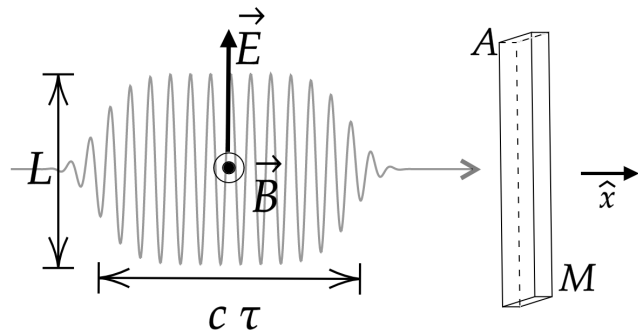
1

Si consideri un *pacchetto d'onde* quasi monocromatico, di durata τ e sezione *quadrata* di lato $L \gg \lambda$, in maniera tale da renderlo approssimabile come un'onda piana.

a) Si dimostri che, se U è l'energia del pacchetto, la sua quantità di moto è $\mathbf{p} = \frac{U}{c} \hat{\mathbf{x}}$, dove $\hat{\mathbf{x}}$ è la direzione di propagazione del pacchetto.

b) Il pacchetto incide ortogonalmente su uno specchio perfetto, libero di muoversi, di massa M e area $A > L^2$. Si dimostri che la velocità finale dello specchio (considerando il limite non relativistico $v \ll c$) è

$$v \simeq \frac{2U}{Mc}$$



c) Il progetto Starshot si pone come obiettivo quello di raggiungere il sistema stellare Alpha Centauri con “vele” spaziali con $M = 10\text{g}$ e $A = 16\text{m}^2$ accelerati dalla Terra mediante un fascio laser. Posto per semplicità $L^2 = A$, si stimi l'energia del laser necessaria ad ottenere la velocità finale $v = 0.3c$, e, per una potenza di 10^{10}W , la distanza ℓ_a percorsa dallo specchio durante l'accelerazione. Si stimi anche quale lunghezza d'onda si debba usare affinché la lunghezza di diffrazione del fascio laser (ovvero la lunghezza su cui il fascio raddoppia la sua larghezza) sia maggiore di ℓ_a .

2

Un'onda elettromagnetica piana, monocromatica di frequenza ω , con campo elettrico

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ E_0 e^{i(kx - \omega t)} \} \hat{\mathbf{y}},$$

si propaga in un mezzo con elettroni liberi, caratterizzato dall'indice di rifrazione $n = n(\omega)$, tale che:

$$n^2(\omega) = \epsilon_p(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

con $\omega_p < \omega$, e

$$\omega_p^2 = \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}.$$

- a) Calcolare le velocità di fase (v_F) e di gruppo (v_g) in funzione di ω , dimostrando che $v_F > c$, $v_g < c$ e $v_F v_g = c^2$.
b) Calcolare le densità di energia elettromagnetica, cinetica e totale in funzione di E_0 .

$$U_{em} = \left\langle \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right\rangle, \quad U_{kin} = \left\langle \frac{n_e m_e}{2} v_e^2 \right\rangle.$$

- c) Scrivere l'espressione dell'onda in un sistema di riferimento S' , in moto con velocità $\mathbf{v}_{S'} = v_g \hat{\mathbf{x}}$ rispetto al laboratorio, mostrando che descrive un campo elettrico uniforme.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (2)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (3)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (4)$$

SOLUZIONI

1

a) L'energia di un campo EM che "occupi" il volume V è

$$U = \int_V \left(\frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) dV, \quad (5)$$

e la sua quantità di moto [

$$\mathbf{p} = \int_V \epsilon_0 (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV \quad (6)$$

In approssimazione di onda piana,

$$B = \frac{E}{c}, \quad , \mathbf{E} \times \mathbf{B} = EB\hat{\mathbf{x}}, \quad (7)$$

con $\hat{\mathbf{x}}$ la direzione di propagazione. Quindi

$$U = \int_V \epsilon_0 E^2 dV, \quad \mathbf{p} = \int_V \epsilon_0 \frac{E^2}{c} \hat{\mathbf{x}} dV = \frac{U}{c} \hat{\mathbf{x}}. \quad (8)$$

b) Utilizziamo la conservazione di energia e quantità di moto con U_i (U_f) e $\mathbf{p}_i$ ($\mathbf{p}_f$) l'energia e quantità di moto del pacchetto incidente (riflesso):

$$\begin{cases} U_i = \frac{M}{2}v^2 + U_f \\ \mathbf{p}_i = M\mathbf{v} + \mathbf{p}_f \end{cases}. \quad (9)$$

Poiché il moto si svolge solo sull'asse x , si può passare direttamente ai moduli di momento e velocità, e ottenere la relazione

$$p_i = Mv - p_f, \quad (10)$$

essendo $\mathbf{p}_f$ diretto in verso opposto a $\mathbf{p}_i$. Usando ora l'identità dimostrata in (a) per i pacchetti incidente e riflesso si ha

$$U_f = Mvc - U_i, \quad (11)$$

ed eliminando U_f dalla prima delle (9)

$$v^2 + 2vc - \frac{4U_i}{M} = 0 \quad (12)$$

ovvero

$$v = -c \pm \sqrt{c^2 + \frac{4U_i}{M}}, \quad (13)$$

della quale solo il segno $+$ è accettabile. Pertanto

$$v = -c + c\sqrt{1 + \frac{4U_i}{Mc^2}} \simeq -c + c\left(1 + \frac{2U_i}{Mc^2}\right) = \frac{2U_i}{Mc}. \quad (14)$$

In alternativa si poteva scrivere l'equazione del moto

$$M \frac{dv}{dt} = \frac{2I}{c} L^2, \quad (15)$$

essendo $2I/c$ la pressione di radiazione esercitata dal fascio laser ($I = |\mathbf{S}|$ è l'intensità); l'equazione vale all'ordine zero in v/c . Integrando sulla durata del pacchetto (che allo stesso ordine è uguale alla durata dell'accelerazione) si ha

$$v_f = v(\tau) = \frac{2I}{Mc} \tau L^2 = \frac{2U}{Mc}, \quad (16)$$

essendo $U = IL^2\tau$.

Per completezza mostriamo che il conto basato sulle leggi di conservazione si può fare anche nel caso relativistico, a partire dalla conservazione del quadrimpulso:

$$P_i + P_i^s = P_f + P_f^s, \quad (17)$$

dove P^s indica il quadrimpulso dello specchio. Da qui

$$\begin{cases} \frac{U_i}{c} + Mc = M\gamma c + \frac{U_f}{c} \\ p_i = M\gamma v - p_f \end{cases}, \quad (18)$$

dove $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Si può risolvere la seconda equazione per $\mathbf{p}_f$ ed ottenere

$$\frac{U_f}{c} = M\gamma v - \frac{U_i}{c}, \quad (19)$$

dove si è usata l'identità dimostrata al punto **(a)**. Sostituendo nella prima, si ottiene

$$\gamma(c + v) - \frac{Mc^2 + 2U_i}{Mc} = 0, \quad (20)$$

da cui

$$c + v = \frac{Mc^2 + 2U_i}{Mc} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (21)$$

Elevando al quadrato, si ottiene un'equazione del second'ordine che è possibile risolvere per v e che restituisce

$$v = c \frac{\frac{U_i}{Mc^2} + 1}{1 + \frac{U_i}{Mc^2} + \frac{Mc^2}{U_i}}, \quad (22)$$

che nel limite $U_i \ll Mc^2$ si riduce al risultato non relativistico ottenuto in precedenza.

c) Per trovare l'energia necessaria a portare lo specchio alla velocità di $0.3c$ è sufficiente utilizzare la formula dimostrata al punto precedente

$$v = \frac{2U}{Mc} \rightarrow U = \frac{Mvc}{2}, \quad (23)$$

inserendo i dati forniti dal testo, si ottiene

$$U \simeq \frac{0.3}{2} 10^{-2} kg 9 \times 10^{16} \frac{m^2}{s^2} = 1.35 \times 10^{14} J. \quad (24)$$

Sia P la potenza del fascio laser, il tempo t necessario a fornire l'energia U allo specchio è dato da

$$t = \frac{U}{P} = \frac{1.35 \times 10^{14} J}{10^{10} W} = 1.35 \times 10^4 s. \quad (25)$$

Considerando sempre il limite non relativistico, lo spazio percorso in accelerazione è dato da

$$\ell_a = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} v t \simeq \frac{1}{2} 0.3 \times 3 \times 10^8 \frac{m}{s} \times 1.35 \times 10^4 s \simeq 6 \times 10^{11} m. \quad (26)$$

La lunghezza ℓ_d su cui un fascio elettromagnetico (quasi) monocromatico di lunghezza d'onda λ raddoppia la sua larghezza L per diffrazione può stimata come

$$\ell_d \simeq \frac{L^2}{\lambda}. \quad (27)$$

Posto $\ell_a = \ell_d$ (condizione limite affinché l'energia del fascio rimanga concentrata sulla vela lungo tutta la fase di accelerazione) si ottiene

$$\lambda = \frac{L^2}{0.5 \times \ell_a} = \frac{256 m^2}{0.5 \times 6 \times 10^{11} m} \simeq 7 \times 10^{-10} m = 6 \times 10^{-1} nm. \quad (28)$$

Grandi laser a questa lunghezza d'onda non sono stati sviluppati, per cui riuscire a mantenere la spinta della pressione di radiazione su una lunghezza sufficiente è una delle (tante) difficoltà del progetto.

2

a)

$$v_F = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} > c. \quad (29)$$

La relazione di dispersione nel plasma è

$$\omega^2 = \omega_p^2 + k^2 c^2, \quad (30)$$

da cui

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{c^2 k}{\sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2}} = c^2 \frac{k}{\omega} = \frac{c^2}{v_F}. \quad (31)$$

Poiché $v_F > c$, dalla (31) segue $v_g < c$. Le (31) e (29) dimostrano inoltre che $v_F v_g = c^2$.

b) Il campo magnetico è dato da

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} \quad (32)$$

la cui soluzione rispetto a $\mathbf{B}$ è

$$\mathbf{B} = \text{Re} \left\{ \frac{E_0}{v_F} e^{i(kx - \omega t)} \right\} \hat{\mathbf{z}}. \quad (33)$$

La densità di energia elettromagnetica (mediata su un periodo) è quindi

$$U_{em} = \left\langle \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2 \text{Re} \left\{ e^{i(kx - \omega t)} \right\}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2}{v_F^2} \text{Re} \left\{ e^{i(kx - \omega t)} \right\}^2 \right\rangle = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 + \frac{\epsilon_0 c^2}{4 v_F^2} E_0^2 = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2 \left(2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right). \quad (34)$$

Il modulo della velocità di un elettrone del mezzo nel campo dell'onda elettromagnetica può essere ricavato da

$$\frac{dv_e}{dt} = -\frac{e}{m_e} E, \quad (35)$$

dalla quale si ricava

$$v_e = \frac{e}{m_e} \text{Re} \left\{ \frac{i E_0}{\omega} e^{i(kx - \omega t)} \right\}. \quad (36)$$

Pertanto è possibile calcolare la densità di energia cinetica (mediata su un periodo) come

$$U_{kin} = \left\langle \frac{n_e m_e}{2} \frac{e^2 E_0^2}{m_e^2 \omega^2} \text{Re} \left\{ i e^{i(kx - \omega t)} \right\}^2 \right\rangle = \frac{\epsilon_0}{4} \left(\frac{n_e e^2}{m_e \epsilon_0} \right) \frac{E_0^2}{\omega^2} = \frac{\epsilon_0}{4} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} E_0^2. \quad (37)$$

Dalla (34) e dalla (37) si ottiene

$$U_{tot} = U_{em} + U_{kin} = \frac{\epsilon_0}{2} E_0^2. \quad (38)$$

c) Dalle trasformazioni di Lorentz dei campi:

$$\mathbf{B}' = \gamma \left(\mathbf{B} - \frac{\mathbf{v}_{S'} \times \mathbf{E}}{c^2} \right) - (\gamma - 1) (\mathbf{B} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{S'}) \hat{\mathbf{v}}_{S'} = \gamma \left(\frac{E}{v_F} - \frac{v_g}{c^2} E \right) \hat{\mathbf{z}} = 0, \quad (39)$$

$$\mathbf{E}' = \gamma (\mathbf{E} + \mathbf{v}_{S'} \times \mathbf{B}) - (\gamma - 1) (\mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{v}}_{S'}) \hat{\mathbf{v}}_{S'} = \gamma (E - v_g B) \hat{\mathbf{y}} = \gamma \left(1 - \frac{v_g}{v_F} \right) E \hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{E}}{\gamma}. \quad (40)$$

Il quadrivettore d'onda nel riferimento del laboratorio è

$$K = \left(\frac{\omega}{c}, \frac{\omega}{v_F} \hat{\mathbf{x}} \right), \quad (41)$$

in S' diventa

$$K' = \left(\gamma \left(\frac{\omega}{c} - \frac{v_g \omega}{v_F c} \right), \gamma \left(\frac{\omega}{v_F} - \frac{v_g \omega}{c^2} \right) \right) = \left(\gamma \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{v_g}{c} \right), 0 \right) = \left(\frac{\omega}{c \gamma}, 0 \right) = (k', 0). \quad (42)$$

Notare che $\gamma = \omega/\omega_p$ da cui $k' = \omega_p/c$, indipendente da ω .