

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2022-2023

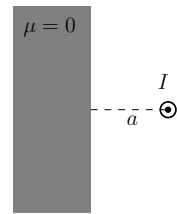
Compito di Fisica 2 (06/04/2024) – appello straordinario

1

a) Un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ è a distanza a dalla superficie piana di un conduttore infinito e perpendicolare alla superficie stessa. Descrivere la soluzione per il campo elettrico in tutto lo spazio e determinare il verso della forza tra dipolo e piano (6 punti).



b) Si consideri ora un filo infinito percorso dalla corrente continua I e disposto a distanza a dalla superficie piana di un materiale perfettamente diamagnetico ($\mu = 0$), parallelamente alla superficie stessa. Descrivere la soluzione per il campo magnetico in tutto lo spazio e determinare il verso della forza tra dipolo e piano (7 punti).



2

Sul piano $x = 0$ è presente una distribuzione uniforme di correnti dipendenti dal tempo tali che nell'immediata prossimità della superficie ($x = 0^+$) il campo magnetico è dato da $\mathbf{B}(x = 0^+, t) = \hat{\mathbf{y}}B_0 \cos \omega t = \hat{\mathbf{z}}\text{Re}(B_0 e^{-i\omega t})$.

Determinare in tutta la regione $x > 0$

- a) il campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, t)$ (6 punti) ,
b) il campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$ e il flusso di energia elettromagnetica (7 punti).

3

Una particella di carica q e massa m è legata da un capo di forza centrale $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ con k costante.

- a) Assumendo che la particella percorra un'orbita circolare di raggio a nel piano xy , determinare la frequenza ω della radiazione emessa e la potenza irradiata P_r (6 punti).
b) Per effetto dell'irraggiamento la carica perde energia: calcolare la variazione temporale del raggio dell'orbita $a = a(t)$ (con $a(0) = a_0$) assumendo che l'energia persa per un periodo di rivoluzione sia piccola rispetto all'energia totale, dando a posteriori una condizione di validità dell'ipotesi) (7 punti).

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Equazioni della magnetostatica di un mezzo materiale lineare con permittività magnetica μ senza correnti libere

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{H} = 0 \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} . \quad (2)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{(\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}}}{rc^2} \quad (3)$$

Potenza istantanea irraggiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (4)$$

Teorema di conservazione dell'energia

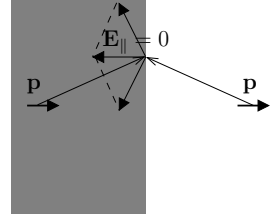
$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

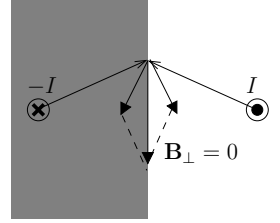
a)

La soluzione si ottiene col metodo delle immagini ponendo un dipolo elettrico $\mathbf{p}$ uguale al dipolo reale (quindi parallelo e avente *lo stesso verso*) in posizione simmetrica rispetto al piano, in modo che la componente di $\mathbf{E}$ parallela alla superficie si annulli. La forza tra due dipoli paralleli è attrattiva (come si può dedurre anche da considerazioni elementari) e quindi il dipolo viene attratto dal piano conduttore.



b)

In questo caso deve annullarsi la componente di $\mathbf{B}$ perpendicolare alla superficie. Questo si ottiene ponendo un filo immagine con corrente *opposta* in posizione simmetrica rispetto al piano. Che le correnti debbano essere opposte è consistente col fatto che il materiale diamagnetico deve respingere il filo, infatti la forza è repulsiva.



2

a) La soluzione generale cercata è una soluzione dell'equazione d'onda nel vuoto con velocità di propagazione uguale a c . Poiché il sistema è invariante per traslazioni lungo y e z , la soluzione avrà la forma di un'onda piana $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, t) = \mathbf{B}(x - ct)$ con $\mathbf{B}$ parallelo al piano essendo un'onda trasversale. Imponendo la continuità con il campo misurato a $x = 0^+$ si ha

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} B_0 \cos(kx - ct) = \hat{\mathbf{z}} \operatorname{Re} (B_0 e^{ikx - i\omega t}) , \quad k = \frac{\omega}{c} . \quad (6)$$

b) Il campo elettrico nel vuoto si può ottenere da

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = c^2 \nabla \times \mathbf{B} = c^2 \frac{\partial B_z}{\partial x} \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{y}} B_0 c^2 k \sin(kx - ct) , \quad (7)$$

da cui $\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \cos(kx - ct)$ con

$$E_0 = B_0 c . \quad (8)$$

Il flusso di energia è dato dal vettore di Poynting $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2(kx - ct)$ e ha valore medio $\langle \mathbf{S} \rangle = \hat{\mathbf{x}} \varepsilon_0 c E_0^2 / 2$.

3

a) Per una forza centrale armonica abbiamo $\omega = \omega_0$ con $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, indipendentemente da a . L'orbita viene percorsa a velocità $v = a\omega_0$. Il momento di dipolo $\mathbf{p}$ vale

$$\mathbf{p} = qa (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) , \quad (9)$$

quindi

$$\ddot{\mathbf{p}} = -qa\omega_0^2 (\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t) . \quad (10)$$

Queste soluzioni si possono anche ottenere proiettando l'equazione del moto lungo le componenti x e y . Si ottengono due equazioni di oscillatore armonico unidimensionale con soluzioni oscillanti e scegliendo le opportune condizioni iniziali si ottiene un'orbita circolare.

Per la potenza irradiata abbiamo

$$P_r = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 = \frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 \quad (11)$$

che è indipendente dal tempo.

b) L'energia totale è la somma dell'energia potenziale e dell'energia cinetica, che sono uguali

$$U = U_{\text{pot}} + K = \frac{1}{2} m \omega_0^2 + \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 a^2 = m \omega_0^2 a^2 . \quad (12)$$

Supponendo che tutta l'energia persa vada in energia irradiata abbiamo

$$P_r = -\frac{dU}{dt} , \quad (13)$$

che, combinata con la (11), ci dà

$$2m\omega_0^2 a \frac{da}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} q^2 a^2 \omega_0^4 , \quad (14)$$

ovvero

$$\frac{da}{dt} = -\frac{k_0 q^2 \omega_0^2}{3mc^3} a = -\frac{a}{\tau} , \quad (15)$$

con soluzione $a(t) = a(0) e^{-t/\tau}$: il moto è a spirale, con

$$\tau = \frac{3mc^3}{k_0 q^2 \omega_0^2} . \quad (16)$$

L'approssimazione usata è valida se $\tau \gg 2\pi/\omega_0$, cioè se il tempo di spiraleggiamento è molto lungo rispetto al periodo dell'orbita.