

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2023-2024

Compito di Fisica 2 (30/04/2024)

1

a) Su un elettrone libero, descritto dall'equazione classica del moto

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e}(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu \mathbf{v} . \quad (1)$$

incide un'onda monocromatica piana polarizzata linearmente con campo elettrico $E_y = E_0 \cos(kx - \omega t) = \text{Re}(E_0 e^{ikx - i\omega t})$. Trascurando inizialmente il termine di forza magnetica, si calcoli

a) l'espressione di $\mathbf{v}$,

b) la potenza P_d diffusa dall'elettrone (mediata sul periodo) mostrando che si può scrivere $P_d = \sigma I$ dove I è l'intensità dell'onda incidente e σ è da determinare.

c) un'espressione per ν assumendo che P_d sia uguale al lavoro fatto per unità di tempo P_m sull'elettrone. Si stimi ν per $\omega \simeq 2.5 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}$ (luce visibile rossa) e $\omega \simeq 10^{18} \text{ s}^{-1}$ (raggi X) stabilendo in quale caso σ è praticamente indipendente dalla frequenza ω .

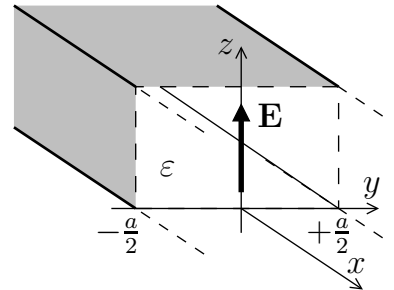
d) Usando ora il risultato di a) per $\mathbf{v}$, calcolare il valore medio sul periodo della forza magnetica $\mathbf{F}_m = \langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle$ scrivendo il risultato in funzione di σ e I .

e) Un'elettrone si trova in due onde contropropaganti lungo x aventi eguale intensità e frequenza nell'intervallo del visibile. Si calcoli $\mathbf{F}_m = \langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle$ in questa configurazione mostrando che dipende dalla componente x della velocità (v_x) e si risolva l'equazione del moto per la velocità media $du_x/dt = F_m(u_x)$ per la velocità media u_x con la condizione iniziale $u_x(t=0) = u_0$ (si usi il risultato del punto d)).

2

Si consideri una guida d'onda a sezione rettangolare orientata lungo x , con pareti perfettamente conduttrici poste a $y = \pm a/2$ e riempita di un mezzo avente permittività relativa $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega)$. Si assuma un'onda monocromatica di frequenza ω con campo elettrico trasversale (modo TE) E_z diretto lungo z e che soddisfa l'equazione di Helmholtz

$$(\nabla^2 + \varepsilon_r \omega^2 / c^2) E_z = 0 . \quad (2)$$



a) Mostrare che l'equazione per E_z ha soluzioni pari o dispari in y

$$E_z = E_z(y, t) = \begin{cases} \text{Re} [E_c \cos(k_y y) e^{ik_x x - i\omega t}] \\ \text{Re} [E_s \sin(k_y y) e^{ik_x x - i\omega t}] \end{cases} \quad (3)$$

determinando per entrambe il valore di k_y e la relazione tra k_x , k_y e ω .

b) Se $\varepsilon_r = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ determinare per quali valori di ω l'onda può propagarsi lungo la guida.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad (k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)) . \quad (4)$$

Raggio classico dell'elettrone

$$r_c = \frac{k_0 e^2}{m_e c^2} = 2.8 \times 10^{-15} \text{ m} . \quad (5)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0 , \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 , \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B} , \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (6)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 . \quad (7)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E} , \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) . \quad (8)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) , \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) , \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp , \quad (9)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel , \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) , \quad B'_\parallel = B_\parallel , \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c) . \quad (10)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S e “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (11)$$

Relazione di dispersione di un mezzo con indice di rifrazione $n = n(\omega)$ ovvero permittività relativa $\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega) = n^2$

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{n^2(\omega)} . \quad (12)$$

SOLUZIONI

1

a) Trascurando il campo magnetico, $\mathbf{v} = v_y \hat{\mathbf{y}}$. Posto $v_y = \text{Re}(v_0 e^{ikx - i\omega t})$

$$v_0 = \frac{-eE_0/m_e}{-i\omega + \nu} = -\frac{ieE_0/m_e}{\omega + i\nu} . \quad (13)$$

b) Usando la formula di Larmor per l'irraggiamento di dipolo elettrico

$$P_d = \frac{2k_0}{3c^3} \langle | -e\dot{\mathbf{v}} |^2 \rangle = \frac{k_0 e^2}{3c^3} | -i\omega v_0 |^2 = \left(\frac{k_0 e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 + \nu^2} \frac{cE_0^2}{3k_0} = \frac{8\pi}{3} r_c^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 + \nu^2} I \equiv \sigma I , \quad (14)$$

dove si è usato $r_c = (k_0 e^2 / m_e c^2)$ e $I = | \langle \mathbf{S} \rangle | = c\epsilon_0 E_0^2 / 2$.

c) Il lavoro fatto sull'elettrone per unità di tempo è

$$P_m = \langle -e\mathbf{v} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{ie^2/m_e}{\omega + i\nu} \right) E_0^2 = \frac{\nu e^2 / 2m_e}{\omega^2 + \nu^2} E_0^2 . \quad (15)$$

Posto $P_d = P_m$ si ottiene $\nu = 4r_c \omega^2 / 3c$. Nel visibile $\nu \simeq 8 \times 6 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$, così che $\sigma \simeq 8\pi r_c^2 \simeq 7.5 \times 10^{-29} \text{ m}^2$, praticamente indipendente dalla frequenza. Nella regione X si ha invece $\nu \simeq 1.2 \times 10^{19} \text{ s}^{-1} \gg \omega$ ovvero il moto è dominato dalle perdite radiative (ma l'approssimazione classica diviene inadeguata).

d) Ponendo $\mathbf{v} \simeq v_y \hat{\mathbf{y}}$ e usando il fatto che $\mathbf{B} = (E_y/c) \hat{\mathbf{z}}$ si ha

$$\langle -e\mathbf{v} \times \mathbf{B} \rangle \simeq \left\langle -\frac{e}{c} E_y v_y \right\rangle \hat{\mathbf{x}} = \frac{P_m}{c} \hat{\mathbf{x}} = \sigma \frac{I}{c} \hat{\mathbf{x}} . \quad (16)$$

e) Calcolando la forza nel sistema S' dove l'elettrone è istantaneamente fermo ($v'_x = 0$)

$$F'_x = +\sigma \frac{I'_+}{c} - \sigma \frac{I'_-}{c} = \frac{\sigma I}{c} \left(\frac{1 - v_x/c}{1 + v_x/c} - \frac{1 + v_x/c}{1 - v_x/c} \right) . \quad (17)$$

Nota: si è usato il fatto che σ fosse indipendente dalla frequenza, altrimenti si sarebbe dovuto generalizzare

$$F'_x = +\sigma(\omega_+) \frac{I'_+}{c} - \sigma(\omega_-) \frac{I'_-}{c} , \quad (18)$$

con $\omega_{\pm} = \gamma\omega(1 \mp v_x/c)$.

Al primo ordine in v_x/c si ha $F_x = F'_x$ e si può sviluppare in serie il risultato:

$$F_x = -\frac{4\sigma I}{c} v_x . \quad (19)$$

L'equazione del moto lungo x

$$m_e \frac{du_x}{dt} = F_x , \quad u_x(0) = u_0 \quad (20)$$

ha come soluzione

$$u_x(t) = u_0 e^{-t/\tau} , \quad \tau = \frac{m_e c}{4\sigma I} . \quad (21)$$

2

a) Inserendo la soluzione cercata nell'equazione di Helmholtz si ottiene

$$-k_x^2 - k_y^2 + \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} = 0 . \quad (22)$$

Le condizioni al bordo impongono $E_z(x, y = \pm a/2, t) = 0$ da cui $k_y = (2m + 1)\pi/a \equiv k_m$ con $m \geq 0$ intero per le soluzioni pari $\propto \cos(k_y y)$, $k_y = 2n\pi/a \equiv k_n$ con $n \geq 1$ intero per le soluzioni dispari $\propto \sin(k_y y)$,

b) L'onda si propaga se $k_x^2 > 0$, ovvero se

$$k_x^2 = \varepsilon_r(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} - k_{m,n}^2 > 0 . \quad (23)$$

Risolvendo per ω si ha

$$\omega > (\omega_p^2 + k_{m,n}^2 c^2)^{1/2} . \quad (24)$$

Per il modo di ordine più basso ($m = 0$),

$$\omega > \left(\omega_p^2 + \left(\frac{\pi c}{a} \right)^2 \right)^{1/2} . \quad (25)$$