

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (09/05/2011)

1

In un solenoide di lunghezza infinita, avente raggio a ed n spire per unità di lunghezza, scorre a regime la corrente alternata $I = I_0 \cos \omega t$.

a) Calcolare il campo magnetico $\mathbf{B}_0$ ed il campo elettrico indotto $\mathbf{E}_1$ nella regione *interna* ($r < a$) al solenoide usando l'approssimazione di correnti lentamente variabili e discutendo a posteriori la validità di tale approssimazione.

b) Calcolare il vettore di Poynting e verificare la conservazione dell'energia per una superficie cilindrica chiusa coassiale ed *interna* al solenoide.

c)* All'esterno di un solenoide infinito il campo magnetico è nullo. Cosa si può dire sul vettore di Poynting e la conservazione dell'energia per una superficie cilindrica chiusa coassiale, ed *esterna* al solenoide?

2

Una particolare linea di trasmissione unidirezionale è caratterizzata dalla relazione di dispersione $\omega = \Omega(ak)^{1/2}$ dove Ω e a sono parametri positivi costanti (e $k > 0$).

a) Calcolare le velocità di fase e di gruppo in funzione di ω .

b) Due pacchetti d'onda quasi monocromatici aventi frequenze principali rispettivamente ω_1 ed ω_2 sono localizzati entrambi ad un capo della linea $x = 0$ all'istante $t = 0$. Calcolare la posizione dei centri dei pacchetti al tempo t e la loro distanza relativa.

c)* Se un pacchetto d'onda ha frequenza principale ω_0 e durata (larghezza temporale) τ a $t = 0$, si stimi la sua durata al tempo t . (È sufficiente tenere conto che il pacchetto ha una larghezza spettrale $\Delta\omega \simeq 1/\tau$.)

3

Una particella di carica q e massa m è legata da un potenziale armonico in due dimensioni

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega^2 x \quad m \frac{d^2 y}{dt^2} = -m\omega^2 y \quad (1)$$

con le condizioni iniziali $x(0) = a$, $y(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, $\dot{y}(0) = v_0$. Il moto è non relativistico, ovvero $v_{x,y} \ll c$.

a) Risolvere l'equazione del moto con le condizioni sopra assegnate e stabilire la forma della traiettoria al variare di v_0 .

b) Descrivere l'irraggiamento della particella in approssimazione di dipolo elettrico (discutendone le condizioni di validità) specificando la frequenza della radiazione emessa, la potenza irraggiata in media sul periodo dell'orbita, la polarizzazione osservata nelle direzioni $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ e $\hat{\mathbf{z}}$.

c)* Assumendo ora che $v_0 = a\omega$, determinare la forma dell'orbita e calcolarne la variazione temporale dovuta alla perdita di energia per irraggiamento, assumendo che l'energia persa per un singolo periodo sia piccola rispetto al totale.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

Per il punteggio si assumano 5 punti per domanda. Le domande asteriscate (*) si intendono leggermente più complesse delle precedenti.

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\epsilon_0 = 1/c^2$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \epsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Teorema di Poynting

$$\partial_t \left(\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (3)$$

dove $\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Campi di radiazione di dipolo elettrico ($k_0 = 1/4\pi\epsilon_0$)

$$\mathbf{B} = \frac{k_0}{rc^3} (\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \hat{\mathbf{r}}) \quad \mathbf{E} = c\mathbf{B} \times \hat{\mathbf{r}}, \quad (4)$$

dove $t_{\text{rit}} = t - r/c$.

Formula di Larmor per la potenza istantanea emessa da un dipolo $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} \langle \dot{\mathbf{p}}^2(t) \rangle \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) In approssimazione di correnti lentamente variabili il campo magnetico è dato dall'espressione statica

$$\mathbf{B}_0 = B_0(t)\hat{\mathbf{z}}, \quad B_0 = \mu_0 n I = \mu_0 n I_0 \cos \omega t. \quad (6)$$

Per simmetria il campo elettrico indotto è solo azimutale e si calcola dalla circuitazione sulle linee di forza circolari:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r E_\phi = -\pi r^2 \partial_t B_0, \quad E_\phi = \frac{1}{2} \mu_0 n I_0 r \omega \sin \omega t. \quad (7)$$

L'approssimazione è accurata se il campo magnetico $\mathbf{B}_1$ generato dalla variazione temporale di E_ϕ è piccolo rispetto a B_0 . Questo vale per frequenza basse tale che $c/a \gg \omega$ ovvero se la propagazione del campo elettromagnetica all'interno del solenoide può essere considerata istantanea su un periodo di oscillazione. Infatti

$$\nabla \times \mathbf{B}_1 = -\hat{\phi} \partial_r B_{1z} = \varepsilon_0 \mu_0 \partial_t \mathbf{E}_\phi, \quad B_1 = -\frac{r^2 \omega^2}{4c^2} \mu_0 n I_0 \cos \omega t \leq -\left(\frac{a\omega}{2c}\right)^2 B_0. \quad (8)$$

b) Il vettore di Poynting all'ordine più basso in $(a\omega/c)$ è

$$\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E}_1 \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{2} \mu_0 \omega n^2 I_0^2 \mathbf{r} \sin \omega t \cos \omega t = \frac{1}{4} \mu_0 \omega n^2 I_0^2 \mathbf{r} \sin 2\omega t. \quad (9)$$

Il flusso su una superficie cilindrica coassiale di raggio r e lunghezza ℓ è

$$\Phi(\mathbf{S}) = 2\pi r \ell S = \frac{\pi}{2} \mu_0 \omega n^2 I_0^2 r^2 \ell \sin 2\omega t. \quad (10)$$

L'energia associata al campo magnetico all'interno della superficie è

$$U_m = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi r^2 \ell = \frac{\pi}{2} \mu_0 n^2 I_0^2 r^2 \ell \cos^2 \omega t \quad (11)$$

e si ha

$$\partial_t U_m = -\frac{\pi}{2} \mu_0 \omega n^2 I_0^2 r^2 \ell \sin 2\omega t = -\Phi(\mathbf{S}) \quad (12)$$

in accordo col teorema di Poynting.

c) Al di fuori del solenoide infinito $\mathbf{B} = 0$ implica $\mathbf{S} = 0$ e quindi $\Phi(\mathbf{S}) = 0$ su una superficie cilindrica coassiale di raggio $r > a$. L'energia "contenuta" all'interno della superficie è $U_m(a) = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \pi a^2 \ell$. La sua variazione deve essere uguale alla potenza meccanica sviluppata all'interno:

$$\partial_t U_m(a) = \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV. \quad (13)$$

La corrente $\mathbf{J}$ scorre nelle spire del solenoide e nella schematizzazione di corrente superficiale si ha

$$\int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} dV = 2\pi a \ell n I E_\phi(a) = \frac{\pi}{2} \mu_0 \omega n^2 I_0^2 a^2 \ell \sin 2\omega t = \partial_t U_m(a). \quad (14)$$

2

a) Dalla definizione di velocità di fase e di gruppo

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{a\Omega^2}{\omega}, \quad v_g = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{a\Omega^2}{2\omega}. \quad (15)$$

b) I centri dei pacchetti viaggiano con diverse velocità di gruppo $v_{1,2} = v_g(\omega_{1,2})$ e quindi

$$x_2(t) - x_1(t) = (v_2 - v_1)t = \frac{a\Omega^2 t}{2} \left(\frac{1}{\omega_2} - \frac{1}{\omega_1} \right). \quad (16)$$

c) Il centro del pacchetto viaggia secondo la legge oraria $x = v_{g0}t$ con $v_{g0} = v_g(\omega_0)$. Poiché il pacchetto ha una larghezza spettrale $\Delta\omega \simeq 1/\tau$ il suo allargamento spaziale può essere stimato come

$$\Delta x = |\Delta(v_g t)| = t|\Delta v_g| = t\Delta\omega \left| \frac{\partial v_g}{\partial \omega}(\omega_0) \right| = \frac{a\Omega^2 t \Delta\omega}{2\omega_0^2} = \frac{a\Omega^2 t}{2\tau\omega_0^2} = \frac{v_{g0}t}{\tau\omega_0} \quad (17)$$

e per l'allargamento temporale

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{v_{g0}} = \frac{t}{\tau\omega_0}. \quad (18)$$

3

a) La soluzione è

$$x = x(t) = a \cos \omega t, \quad y = y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (19)$$

e quindi posto $b = v_0/\omega$ l'equazione della traiettoria

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

descrive un'ellisse di semiassi a e b . Casi particolari includono un'orbita lineare ($v_0 = 0$) od un'orbita circolare ($v_0 = a\omega$, vedi punto c)).

b) L'approssimazione di dipolo vale se la sorgente è più piccola della lunghezza d'onda della radiazione emessa $\lambda = 2\pi c/\omega$. Dato che il moto è assunto non relativistico deve essere $v_x \sim a\omega \ll c$ e $v_y \sim b\omega \ll c$ che implicano $a \ll \lambda$ e $b \ll \lambda$, per cui l'approssimazione è giustificata.

La polarizzazione è proporzionale alla proiezione di $\ddot{\mathbf{p}} = q\ddot{\mathbf{r}} = -\omega^2 q\mathbf{r}$ sul piano ortogonale alla direzione di osservazione $\mathbf{n}$, quindi è lineare se $\mathbf{n}$ giace sul piano dell'orbita ed in generale ellittica in altre direzioni.

La potenza media emessa è

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} \langle \ddot{\mathbf{p}}^2 \rangle = \frac{2k_0 q^2 \omega^4}{3c^3} \langle a^2 \cos^2 \omega t + b^2 \sin^2 \omega t \rangle = \frac{k_0 q^2 \omega^4}{3c^3} (a^2 + b^2). \quad (21)$$

c) Se $v_0 = a/\omega$ allora $b = a$ e l'orbita è circolare, percorsa inizialmente con velocità $v(0) = v_0$. Ad ogni istante l'energia totale in funzione del raggio $r = v/\omega$ è data da

$$E = \frac{m}{2} v^2(t) + \frac{m}{2} \omega^2 r^2(t) = m\omega^2 r^2(t) \quad (22)$$

mentre la potenza irradiata, assumendo che il raggio vari lentamente così che l'orbita si può considerare sempre circolare su un periodo

$$P \simeq \frac{2k_0 q^2 \omega^4}{3c^3} r^2(t). \quad (23)$$

Imponendo l'equazione

$$\frac{dE}{dt} = -P \quad (24)$$

si ottiene

$$2m\omega^2 r \frac{dr}{dt} = -\frac{2k_0 q^2 \omega^4}{3c^3} r^2, \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{k_0 q^2 \omega^2}{3mc^3} r \equiv -\frac{r}{\tau}, \quad (25)$$

con soluzione

$$r(t) = r(0)e^{-t/\tau} = ae^{-t/\tau}. \quad (26)$$