

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2010-2011

Compito di Fisica 2 (23/05/2012)

1

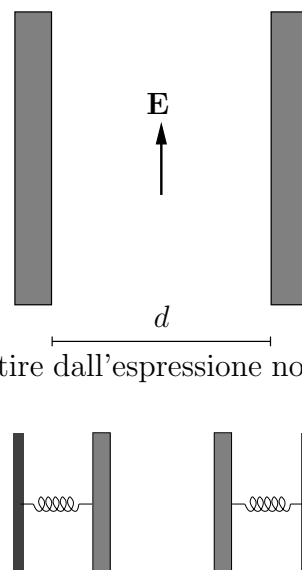
Un'onda EM piana di frequenza ω e polarizzazione S (perpendicolare al piano di incidenza) incide ad angolo $\theta_i = \theta$ sulla superficie di un mezzo semi-infinito di noto indice di rifrazione n reale e positivo nel sistema del laboratorio L . Le leggi della riflessione e della rifrazione sono note.

- Determinare un sistema di riferimento L' nel quale l'onda ha incidenza normale sulla superficie del mezzo.
- Calcolare in L' le frequenze e i vettori d'onda delle onde incidente, riflessa e rifratta, e la velocità di fase dell'onda rifratta.
- Calcolare le ampiezze dei campi delle onde in L' e dare l'espressione dei coefficienti di riflessione e trasmissione $r' = E'_r/E'_i$ e $t' = E'_t/E'_i$ in funzione dei coefficienti $r = E_r/E_i$ e $t = E_t/E_i$ in L (r e t sono assunti come noti e *non* ne è richiesto il calcolo!)

2

Si consideri una cavità unidimensionale costituita da due pareti piane perfettamente conduttrici (specchi perfetti) poste a $x = \pm d/2$. All'interno della cavità esiste un campo EM di frequenza ω , ampiezza massima E_0 , e polarizzato parallelamente alle pareti.

- Determinare i valori possibili per ω e scrivere la forma generale del campo elettromagnetico nella cavità.
- Calcolare l'energia elettromagnetica U contenuta nella cavità (assumendo che U sia indipendente dal tempo, si usi nel calcolo il valor medio su un periodo della densità di energia).
- Scrivere la pressione di radiazione P sulle pareti in funzione di E_0 (a partire dall'espressione nota per un'onda piana incidente su uno specchio perfetto) e il rapporto U/P .
- Si supponga ora che gli specchi abbiano una densità di massa finita σ e non abbiano una posizione fissata ma siano legati a pareti rigide da due molle identiche di frequenza caratteristica Ω (cosicché per un allungamento δ , la forza di richiamo per unità di superficie è $f = -\sigma\Omega^2\delta$). In assenza di campo EM all'interno della cavità, le molle sono a riposo. Che relazione esiste tra l'energia e la frequenza dei modi elettromagnetici quando le molle sono compresse dalla pressione di radiazione?



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell ($\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$, $k_0 = 1/(4\pi\varepsilon_0)$)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Teorema di conservazione dell'energia (Poynting)

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (2)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (3)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (4)$$

Pressione esercitata da un'onda elettromagnetica piana con campo $\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_i e^{ikx - i\omega t})$ su uno specchio perfetto, a incidenza normale

$$P = 2I/c, \quad I = \varepsilon_0 c^2 |\langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle| = \varepsilon_0 c |E_i|^2 / 2. \quad (5)$$

Angoli di riflessione e rifrazione per un'interfaccia piana tra vuoto e mezzo con indice di rifrazione n

$$\theta_r = \theta_i, \quad n \sin \theta_t = \sin \theta_i. \quad (6)$$

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (7)$$

SOLUZIONI

1

a) Scegliamo per il laboratorio L un sistema di riferimento in cui xy sia il piano di incidenza. Per un'onda incidente in polarizzazione S , il vettore d'onda $\mathbf{k}_i$ appartiene al piano di incidenza, mentre il campo elettrico dell'onda è diretto lungo $\hat{\mathbf{z}}$

$$\mathbf{E}_i = E_i \hat{\mathbf{z}} = E_0 \hat{\mathbf{z}} e^{i(\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x} - \omega t)} \quad (8)$$

dove ω è la frequenza dell'onda e $\mathbf{k}_i = k_i(\cos \theta_i, \sin \theta_i, 0)$, con θ_i angolo di incidenza. Per semplicità, nel seguito si omette l'indice i per k , θ e ω . Nel vuoto, ovviamente, $kc = \omega$. Il campo magnetico dell'onda incidente appartiene al piano di incidenza ed è dato dall'equazione di Faraday-Neumann

$$i\omega \mathbf{B}_i = \partial_y E_i \hat{\mathbf{x}} - \partial_x E_i \hat{\mathbf{y}} \quad (9)$$

da cui si ottiene

$$\mathbf{B}_i = \frac{E_i}{c} (\sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta \hat{\mathbf{y}}), \quad (10)$$

come si può ottenere anche sulla base di semplici considerazioni geometriche: $B_i = E_i/c$ nel vuoto e $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ deve essere parallelo al vettore d'onda $\mathbf{k}_i$.

Le trasformazioni di Lorentz della frequenza e del vettore d'onda di una generica onda, da un riferimento L ad un riferimento L' in moto a velocità β rispetto al precedente, sono le seguenti

$$\omega' = \gamma(\omega - c\beta \cdot \mathbf{k}), \quad \mathbf{k}'_{\parallel} = \gamma \left(\mathbf{k}_{\parallel} - \beta \frac{\omega}{c} \right), \quad \mathbf{k}'_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp}. \quad (11)$$

Nel caso in esame, se si vuole che in L' l'incidenza sia normale, la componente k'_y del vettore d'onda dovrà annullarsi. Perciò si pone $\beta = \beta \hat{\mathbf{y}}$ e

$$k'_y = \gamma \left(k_y - \beta \frac{\omega}{c} \right) = \gamma \left(k \sin \theta - \beta \frac{\omega}{c} \right) = 0 \quad (12)$$

da cui si ottiene $\beta = \sin \theta$. Inoltre $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = 1/\cos \theta$. Si noti che in L il mezzo con indice n è in quiete, mentre in L' è in moto a velocità $-\sin \theta \hat{\mathbf{y}}$.

b) Note le leggi di riflessione e rifrazione, le frequenze e i vettori d'onda dell'onda riflessa (r) e dell'onda rifratta (t) nel riferimento L sono date rispettivamente da

$$\omega_r = \omega, \quad k_r = k(-\cos \theta, \sin \theta, 0), \quad (13)$$

$$\omega_t = \omega, \quad k_t = k(\cos \theta_t, \sin \theta_t, 0), \quad (14)$$

dove $k_t = kn$ e $\sin \theta_t = \sin \theta/n$. Passando al riferimento L' con l'opportuna trasformazione di Lorentz alla velocità β determinata al punto precedente, per l'onda incidente si ha (omettiamo la componente dei vettori d'onda normale al piano di incidenza, che è sempre nulla)

$$\omega'_i = \gamma(\omega - c\beta k \sin \theta) = \gamma\omega(1 - \sin^2 \theta) = \omega/\gamma, \quad (15)$$

$$k'_{i,x} = k_{i,x} = k_i \cos \theta = k/\gamma, \quad (16)$$

$$k'_{i,y} = \gamma \left(k \sin \theta - \frac{\beta}{c} \omega \right) = 0, \quad (17)$$

per l'onda riflessa

$$\omega'_r = \gamma(\omega - c\beta k \sin \theta) = \gamma\omega(1 - \sin^2 \theta) = \omega/\gamma, \quad (18)$$

$$k'_{r,x} = k_{r,x} = -k_{i,x} = -k \cos \theta = -k/\gamma, \quad (19)$$

$$k'_{r,y} = \gamma \left(k \sin \theta - \frac{\beta}{c} \omega \right) = 0, \quad (20)$$

e infine per l'onda rifratta (ricordando che $k \sin \theta = k_t \sin \theta_t$)

$$\omega'_t = \gamma(\omega - c\beta k_t \sin \theta_t) = \gamma\omega(1 - \sin^2 \theta) = \omega/\gamma, \quad (21)$$

$$k'_{t,x} = k_{t,x} = k n \cos \theta_t = k n (1 - \sin^2 \theta_t)^{1/2} = k(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad (22)$$

$$k'_{t,y} = \gamma \left(k_t \sin \theta_t - \frac{\beta}{c} \omega \right) = \gamma(k n \sin \theta_t - \omega \sin \theta / c) = 0. \quad (23)$$

Nel riferimento L' si ha dunque incidenza normale: le onde riflessa e rifratta hanno uguale frequenza e vettore d'onda diretto sempre lungo $\hat{\mathbf{x}}$. Notare che k'_t diventa immaginario (come k_{tx}) se $n < \sin \theta$, ovvero se c'è riflessione totale. Sempre in L' , la velocità di fase dell'onda rifratta è

$$v'_{f,t} = \frac{\omega'_t}{k'_{t,x}} = c \frac{\cos \theta}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}. \quad (24)$$

c) Nella geometria del problema la legge di trasformazione del campo elettrico si riduce a

$$E'_z = \gamma(E_z - \beta B_x c), \quad (25)$$

essendo $\beta = \beta \hat{\mathbf{y}}$ e tutte le onde polarizzate lungo $\hat{\mathbf{z}}$. Il campo magnetico delle onde incidente, riflessa e rifratta si scrive in funzione dell'ampiezza del campo elettrico come

$$\mathbf{B}_i = \frac{E_i}{c} (+\sin \theta \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta \hat{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{B}_r = \frac{E_r}{c} (+\sin \theta \hat{\mathbf{x}} + \cos \theta \hat{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{B}_t = n \frac{E_t}{c} (\sin \theta_t \hat{\mathbf{x}} - \cos \theta_t \hat{\mathbf{y}}), \quad (26)$$

dove per la legge di Snell della rifrazione $\sin \theta = n \sin \theta_t$.

Per le tre onde si ha, rispettivamente

$$E'_{i,z} = \gamma \left(E_i - \sin \theta c \frac{E_i}{c} \sin \theta \right) = \gamma E_i (1 - \sin^2 \theta) = E_i / \gamma, \quad (27)$$

$$E'_{r,z} = \gamma \left(E_r - \sin \theta c \frac{E_r}{c} \sin \theta \right) = \gamma E_r (1 - \sin^2 \theta) = E_r / \gamma, \quad (28)$$

$$E'_{t,z} = \gamma \left(E_t - \sin \theta c n \frac{E_t}{c} \sin \theta_t \right) = \gamma E_t \left(1 - n \frac{\sin^2 \theta}{n} \right) = \gamma E_t (1 - \sin^2 \theta) = E_t / \gamma. \quad (29)$$

Si ha quindi

$$r' = \frac{E'_r}{E'_i} = \frac{E_r}{E_i} = r, \quad t' = \frac{E'_t}{E'_i} = \frac{E_t}{E_i} = t. \quad (30)$$

2

a) La soluzione generale per il campo elettrico $E = E(x)e^{-i\omega t}$ nella regione di vuoto è (omettendo i segni di vettore)

$$E(x) = E_1 e^{+ikx} + E_2 e^{-ikx}, \quad k = \omega/c. \quad (31)$$

Le condizioni al bordo impongono $E(\pm d/2) = 0$, da cui il sistema

$$E_1 e^{+ikd/2} + E_2 e^{-ikd/2} = 0, \quad E_1 e^{-ikd/2} + E_2 e^{+ikd/2} = 0, \quad (32)$$

che ha soluzione se il determinante $e^{ikd} - e^{-ikd} = 2i \sin(kd) = 0$, da cui

$$kd = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad \omega = kc = n\pi c/d, E_2 = -E_1 e^{in\pi} = (-1)^{n+1} E_1. \quad (33)$$

Si ha quindi per il modo di ordine n

$$E_n(x) = \frac{E_0}{2} (e^{in\pi x/d} + (-1)^{n+1} e^{-in\pi x/d}), \quad B_n(x) = \frac{E_0}{2c} (e^{in\pi x/d} - (-1)^{n+1} e^{-in\pi x/d}). \quad (34)$$

b) L'energia contenuta (per unità di superficie) nella cavità è data da

$$U = \int_{-d/2}^{+d/2} (\varepsilon_0/2) \langle \mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2 c^2 \rangle dx. \quad (35)$$

Si ha

$$|\mathbf{E}^2| = (|E_0|^2/2)[1 + (-1)^{n+1} \cos(2n\pi x/d)], \quad |\mathbf{B}^2| = (|E_0|^2/2c^2)[1 - (-1)^{n+1} \cos(2n\pi x/d)], \quad (36)$$

per cui (essendo nullo l'integrale del termine oscillante)

$$U = \varepsilon_0 |E_0|^2 d/4. \quad (37)$$

c) Il campo è la sovrapposizione di due onde piane di eguale ampiezza $E_0/2$ e propaganti in direzioni opposte. L'intensità dell'onda incidente su ciascuna parete è quindi $I = \varepsilon_0 c |E_0/2|^2/2$ e la pressione esercitata vale allora

$$P = 2I/c = \varepsilon_0 |E_0|^2/4 = U/d. \quad (38)$$

d) L'equilibrio delle forze impone $P = \sigma \Omega^2 \delta/2$. Dato che la lunghezza effettiva della cavità è adesso $d + \delta$, dalla condizione $k(d + \delta) = n\pi$ otteniamo una relazione tra frequenza e ampiezza del modo:

$$\frac{\omega}{c} \left(d + \frac{\varepsilon_0 |E_0|^2}{2\sigma \Omega^2} \right) = n\pi. \quad (39)$$