

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2012-2013

Compito di Fisica 2 (28/05/2013)

1

Un'onda elettromagnetica piana monocromatica, avente frequenza ω e ampiezza del campo elettrico E_0 , si propaga in un mezzo in quiete nel sistema S del laboratorio, avente indice di rifrazione reale $n > 1$.

a) Calcolare la frequenza ω' , il vettore d'onda k' e le ampiezze dei campi elettrico E'_0 e magnetico B'_0 dell'onda nel sistema S' che si muove con la velocità di fase dell'onda v_f rispetto a S . Quali quantità si annullano in S' ?

b) Calcolare, a partire dalle espressioni dei campi, la densità di corrente $\mathbf{J}$ sia in S che in S' e verificare la corrispondente legge di trasformazione.

Si consideri ora un mezzo differente caratterizzato dalla relazione di dispersione $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 c^2$, con ω_0 costante. Si assuma $\omega > \omega_0$.

c) Mostrare che nel mezzo si ha velocità di fase $v_f > c$, velocità di gruppo $v_g < c$ e che $v_f v_g = c^2$.

d) Calcolare la frequenza ω'' , il vettore d'onda k'' e le ampiezze dei campi elettrico E''_0 e magnetico B''_0 dell'onda nel sistema S'' che si muove con la velocità di gruppo dell'onda v_g rispetto a S . Quali quantità si annullano in S'' ?

e) Si risponda nuovamente alla domanda b) per S e S'' .

2

Si consideri un plasma di elettroni e positroni, aventi eguali densità $n_{e\pm} = n_0$.

a) In assenza di campi esterni, determinare la relazione di dispersione per le onde elettromagnetiche trasverse nel plasma e individuare eventuali frequenze di taglio in funzione della frequenza di plasma $\omega_p = \sqrt{n_0 e^2 / \varepsilon_0 m_e}$.

b) Nel caso che il plasma sia immerso in un campo magnetico statico $\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}$, determinare la relazione di dispersione per onde che si propagano lungo $\mathbf{B}_0$ e individuare eventuali frequenze di taglio e di risonanza.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_{\parallel} = \gamma(A_{\parallel} - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp} \quad (2)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (3)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (4)$$

Definizione di indice di rifrazione $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\omega)$ e relazione con la permittività dielettrica $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \mathbf{n}^2 = \epsilon_r \quad (5)$$

SOLUZIONI

1

a) Nel riferimento S , il mezzo è in quiete e la velocità di fase dell'onda è data da

$$v_f = \omega/k = c/n < c \quad (6)$$

Le ampiezze dei campi sono legate dalla relazione $E_0 = v_f B_0$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz per il quadrivettore $(\omega/c, \mathbf{k})$ otteniamo i valori di ω' e k' nel riferimento S' in moto a velocità v_f

$$\omega' = \gamma_f(\omega - kv_f) = 0 \quad k' = \gamma_f(k - v_f\omega/c) = k/\gamma_f, \quad (7)$$

dove $\gamma_f = (1 - v_f^2/c^2)^{-1/2}$. Utilizzando le trasformazioni di Lorentz dei campi

$$E'_0 = \gamma_f(E_0 - v_f B_0) = 0 \quad B'_0 = \gamma_f(B_0 - v_f E_0/c^2) = B_0/\gamma_f. \quad (8)$$

Nel riferimento S' si annullano la frequenza e l'ampiezza del campo elettrico.

b) Prendendo una polarizzazione a piacere (e.g. $\hat{\mathbf{y}}$) e usando il fatto che nel riferimento S risulta $E_0 = v_f B_0 = \omega B_0/k$ e $\omega = kc/n$, determiniamo la densità di corrente nel mezzo facendo uso delle espressioni dei campi, prima nel riferimento S

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B} - \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E} = \frac{i\omega}{\mu_0 c^2} (1 - n^2) E_0 e^{ik_\mu x^\mu} \hat{\mathbf{y}} = \frac{i\omega}{\mu_0 c^2} (1 - n^2) \mathbf{E}, \quad (9)$$

e poi nel riferimento S'

$$\mathbf{J}' = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{B}' = -\frac{ik'B'_0}{\mu_0} e^{ik'_\mu x'^\mu} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{ikB_0}{\mu_0 \gamma_f^2} e^{ik_\mu x^\mu} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{i\omega E_0}{\mu_0 v_f^2 \gamma_f^2} e^{ik_\mu x^\mu} \hat{\mathbf{y}} = -\frac{i\omega n^2}{\mu_0 c^2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \mathbf{E}, \quad (10)$$

osservando che $\gamma_f^{-2} = (1 - 1/n^2)$. Si trova così che $\mathbf{J} = \mathbf{J}'$, in accordo con la trasformazione di Lorentz della componente della quadridensità trasversale alla direzione del boost: $\mathbf{J}_\perp = \mathbf{J}'_\perp$.

c) Dalla relazione di dispersione nelle ipotesi date

$$v_f = \omega/k = \frac{(\omega_0^2 + k^2 c^2)^{1/2}}{k} > c \quad v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{kc^2}{(\omega_0^2 + k^2 c^2)^{1/2}} = \frac{c^2}{v_f} < c. \quad (11)$$

d) Posto $\gamma_g = (1 - v_g^2/c^2)^{-1/2}$ e procedendo come al punto a)

$$\omega'' = \gamma_g(\omega - kv_g) = \omega/\gamma_g \quad k'' = \gamma_g(k - v_g\omega/c) = 0 \quad (12)$$

$$E''_0 = \gamma_g(E_0 - v_g B_0) = E_0/\gamma_g \quad B''_0 = \gamma_g(B_0 - v_g E_0/c^2) = 0. \quad (13)$$

Nel riferimento S'' si annullano il vettore d'onda e l'ampiezza del campo magnetico.

e) L'espressione di $\mathbf{J}$ è la stessa del punto b) con $n^2 = 1 - \omega_0^2/\omega^2$

$$\mathbf{J}'' = -\frac{1}{c^2} \partial_t \mathbf{E}'' = \frac{i\omega'' E''_0}{\mu_0 c^2} e^{ik''_\mu x''^\mu} \hat{\mathbf{y}} = \frac{i\omega E_0}{\mu_0 c^2 \gamma_g^2} e^{ik_\mu x^\mu} \hat{\mathbf{y}} = \frac{i\omega}{\mu_0 c^2} (1 - n^2) \mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad (14)$$

osservando che $\gamma_g^{-2} = (1 - n^2)$. Perciò anche per il riferimento S'' la densità di corrente non cambia.

2

a) e b) Assumiamo polarizzazione lineare lungo $\hat{\mathbf{x}}$ e scriviamo le equazioni del moto in $\mathbf{v}_{\pm}$, rispettivamente per i positroni (+) e per gli elettroni (-), nel piano xy

$$\frac{dv_{x\pm}}{dt} = \pm \frac{e}{m_e}(E_x + v_{y\pm}B_0) \quad \frac{dv_{y\pm}}{dt} = \mp \frac{e}{m_e}(v_{x\pm}B_0) . \quad (15)$$

Il caso **a)** corrisponde a $B_0 = 0$: in assenza di campi esterni, l'approssimazione di campi deboli ci permette di trascurare gli effetti di forza magnetica. Nel caso del plasma immerso in un campo statico esterno, questo fornisce l'unico contributo magnetico alla forza di Lorentz.

Sostituendo la seconda equazione nella prima derivata ulteriormente rispetto al tempo otteniamo

$$\frac{d^2v_{x\pm}}{dt^2} = \mp i\omega \frac{e}{m_e}E_x \pm \frac{eB_0}{m_e} \frac{dv_{y\pm}}{dt} = \mp i\omega \frac{e}{m_e}E_x - \omega_c^2 v_{x\pm} \quad (16)$$

dove si è posto $\omega_c = eB_0/m_e$. Data la dipendenza temporale da $e^{-i\omega t}$ abbiamo $\ddot{v}_{x\pm} = -\omega^2 v_{x\pm}$ e dunque la componente x della velocità è data da

$$v_{x\pm} = \mp i\omega \frac{e}{m_e(\omega_c^2 - \omega^2)}E_x , \quad (17)$$

mentre per la componente y abbiamo

$$\begin{aligned} (-i\omega)v_{y\pm} &= \mp \frac{eB_0}{m_e}v_{x\pm} = (\mp)^2 i\omega_c \frac{e}{m_e(\omega_c^2 - \omega^2)}E_x \\ v_{y\pm} &= -\omega_c \frac{e}{m_e(\omega_c^2 - \omega^2)}E_x . \end{aligned} \quad (18)$$

Determiniamo la densità di corrente complessiva $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, con σ conducibilità complessa

$$J_x = n_0(ev_{x+} - ev_{x-}) = -i\omega \frac{2n_0e^2}{m_e(\omega_c^2 - \omega^2)}E_x = \sigma E_x \quad J_y = n_0(ev_{y+} - ev_{y-}) = 0 \quad (19)$$

che ha quindi la sola componente x . Osservando che la polarizzazione del mezzo $\mathbf{P} = \varepsilon_0\chi\mathbf{E}$ è legata alla densità di corrente

$$\mathbf{J} = (-i\omega)\mathbf{P} = -i\omega\varepsilon_0\chi\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \chi = i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \frac{2n_0e^2}{\varepsilon_0m_e(\omega_c^2 - \omega^2)} \quad (20)$$

e otteniamo così la costante dielettrica relativa del plasma di elettroni e positroni

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \chi = 1 + \frac{2n_0e^2}{\varepsilon_0m_e(\omega_c^2 - \omega^2)} = 1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2} , \quad (21)$$

dove $\omega_p = \sqrt{n_0e^2/(\varepsilon_0m_e)}$ è la frequenza di plasma degli elettroni/positroni. Il conto dà lo stesso risultato scegliendo una polarizzazione lineare lungo $\hat{\mathbf{y}}$: la costante dielettrica e la relazione di dispersione sono indipendenti dalla polarizzazione.

Allo stesso risultato si arriva considerando polarizzazione circolare ovvero partendo da un'ampiezza dell'onda elettromagnetica $\mathbf{E}_0 = (\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$. Per evitare confusione coi segni indichiamo adesso con $\mathbf{v}_p$ e $\mathbf{v}_e$ le velocità rispettivamente di positroni ed elettroni. Cercando soluzioni con ampiezze

$\mathbf{v}_{0p} = v_{0p}(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$ e $\mathbf{v}_{0e} = v_{0e}(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$, e osservando che $(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}}) \times \hat{\mathbf{z}} = \pm i(\hat{\mathbf{x}} \pm i\hat{\mathbf{y}})$, dall'equazione del moto si ottiene per le ampiezze

$$-i\omega v_{0p} = +\frac{e}{m_e}(E_0 \pm iv_{0p}B_0), \quad -i\omega v_{0e} = -\frac{e}{m_e}(E_0 \mp iv_{0e}B_0), \quad (22)$$

ovvero

$$v_{0p} = +\frac{ieE_0}{m_e}\omega \pm \omega_c, \quad v_{0e} = -\frac{ieE_0}{m_e}\omega \mp \omega_c. \quad (23)$$

Si ottiene quindi per l'ampiezza della corrente

$$J_0 = en_0(v_{0p} - v_{0e}) = \frac{ie^2E_0n_0}{m_e} \left(\frac{1}{\omega \pm \omega_c} + \frac{1}{\omega \mp \omega_c} \right) = i\varepsilon_0\omega_p^2 \frac{2\omega}{\omega^2 - \omega_c^2}, \quad (24)$$

indipendentemente dallo stato di polarizzazione.

Dall'indice di rifrazione del mezzo $\mathbf{n} = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ ricaviamo la relazione di dispersione

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \mathbf{n}^2 = 1 - \frac{2\omega_p^2}{\omega^2 - \omega_c^2}. \quad (25)$$

Nel caso **a**): $\omega_c = 0$, la frequenza di taglio è a $\sqrt{2}\omega_p$ e non si hanno risonanze.

Nel caso **b**): la propagazione risulta proibita per $\omega_c < \omega < (\omega_c^2 + 2\omega_p^2)^{1/2}$ e, indipendentemente dalla polarizzazione, si ha sempre una risonanza per $\omega = \omega_c$.