

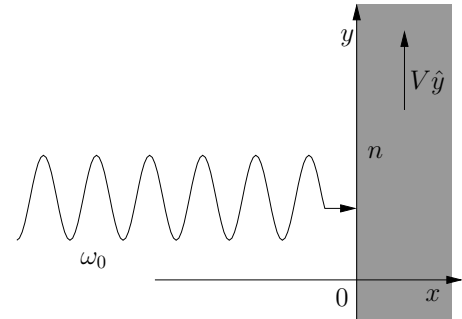
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2013-2014

Compito di Fisica 2 (21/05/2014)

1

Nel sistema di riferimento S un'onda EM piana di frequenza ω_0 incide perpendicolarmente sulla superficie di un mezzo che riempie uniformemente il semispazio $x > 0$. Il mezzo è in moto nel sistema S con velocità uniforme $\mathbf{V} = V\hat{y}$ in direzione parallela alla superficie e ha indice di rifrazione, definito e noto *nel sistema S' in cui il mezzo è in quiete*, reale e positivo $n > 0$. Si trascuri inizialmente la dipendenza di n dalla frequenza.



a) Calcolare in S' gli angoli di incidenza, riflessione e rifrazione. Dimostrare che le onde riflessa e rifratta in S rimangono perpendicolari alla superficie.

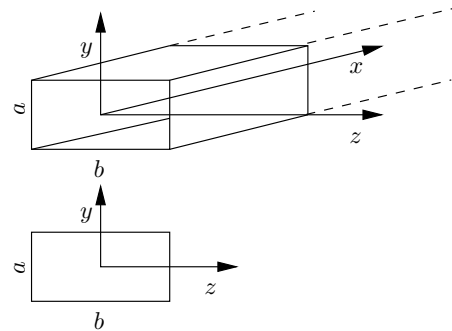
b) Determinare le condizioni su n e V per cui si ha riflessione totale e si dia un esempio di un mezzo per cui tale condizione è verificata (in un opportuno intervallo di frequenze).

c) Tenendo adesso conto della dipendenza di $n = n(\omega)$ dalla frequenza, si dica come cambiano le risposte precedenti (si assuma eventualmente $\beta \ll 1$ per dare una risposta esplicita).

2

Una guida d'onda ha sezione rettangolare di lati a e b ($|y| < a/2$, $|z| < b/2$) e pareti perfettamente conduttrici.

a) Si consideri la propagazione di un modo TE di frequenza ω avente la forma $\mathbf{E} = \hat{z}E_z(y)e^{ikx-i\omega t}$ con $E_z(y) = E_0f(y)$. Determinare la forma di $f(y)$, la relazione di dispersione $\omega = \omega(k)$ e le eventuali frequenze di taglio.



b) Si assuma ora che la guida d'onda sia riempita uniformemente da un mezzo avente indice di rifrazione $n = n(\omega)$. Si scriva la forma generale della relazione di dispersione e la si scriva esplicitamente nel caso $n^2(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ (gas con elettroni liberi) determinando le frequenze di taglio.

c) Si supponga ora che il mezzo riempia la guida nella regione $x > 0$, mentre nella regione $x < 0$ la guida è vuota. Da $x = -\infty$ incide un'onda della stessa forma del punto **a)** (per semplicità si può assumere il modo di propagazione di ordine più basso e che la frequenza ω sia maggiore della frequenza di taglio sia nel vuoto che nel mezzo). Calcolare le ampiezze delle onde riflessa e trasmessa all'interfaccia $x = 0$.

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp \quad (2)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Relazione di dispersione in un mezzo caratterizzato dall'indice di rifrazione $n(\omega)$ (con $n^2(\omega) = \varepsilon_r(\omega)$)

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = n^2(\omega) . \quad (3)$$

Formule di Fresnel per la riflessione e trasmissione all'interfaccia piana di separazione tra due mezzi aventi indice di rifrazione n_1 e n_2

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{k_{i\perp} - k_{t\perp}}{k_{i\perp} + k_{t\perp}}, \quad \frac{E_t}{E_i} = \frac{2k_{i\perp}}{k_{i\perp} + k_{t\perp}} \quad (\text{pol.}S) , \quad (4)$$

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2^2 k_{i\perp} - n_1^2 k_{t\perp}}{n_2^2 k_{i\perp} + n_1^2 k_{t\perp}}, \quad \frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 n_2 k_{i\perp}}{n_2^2 k_{i\perp} + n_1^2 k_{t\perp}} \quad (\text{pol.}P) , \quad (5)$$

dove E_i , E_r sono le ampiezze delle onde incidente e riflessa nel mezzo 1, E_t l'ampiezza dell'onda trasmessa (rifratta) nel mezzo 2, $\mathbf{k}_i$ e $\mathbf{k}_t$ sono i vettori d'onda per le onde incidente e trasmessa, e $\perp$ indica la direzione perpendicolare alla superficie di separazione.

Legge di Snell della rifrazione

$$n_2 \sin \theta_t = n_1 \sin \theta_i \quad (6)$$

dove θ_i e θ_t sono gli angoli formati dai vettori d'onda dell'onde incidente e trasmessa con la perpendicolare alla superficie.

SOLUZIONI

1

a) Trasformazione del vettore d'onda e della frequenza da S a S' se $\beta = (V/c)\hat{\mathbf{y}}$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$

$$k'_x = k_x = k, \quad k'_y = \gamma(k_y - \beta\omega_0/c) = -\beta\gamma k, \quad \omega'_0 = \gamma(\omega_0 - \beta k_y c) = \gamma\omega_0, \quad (7)$$

dove si è usato $k_x = k = \omega_0/c$ e $k_y = 0$. Essendo $1 + \beta^2\gamma^2 = \gamma^2$ si verifica che $k' = \omega'_0/c$. L'onda incide in S' con angolo θ' tale che $\tan \theta' = k'_y/k'_x = -\beta\gamma$, ovvero $\sin \theta' = -\beta$ e $\cos \theta' = 1/\gamma$.

L'angolo di rifrazione è dato dalla legge di Snell, $n \sin \theta'_t = \sin \theta'$.

Siccome per le onde riflessa e rifratta la componente y del vettore d'onda è la stessa dell'onda incidente, la trasformazione inversa da S' a S restituisce $k_y = 0$ e quindi tutte le onde sono a incidenza normale in S .

b) Dato che n è reale, la riflessione totale si ha se $n < 1$ e $\sin \theta' = n$ ovvero $V/c = \beta = n$.

La condizione $0 < n < 1$ si può verificare per un metallo o un gas di elettroni liberi per cui $n = (1 - \omega_p^2/\omega^2)^{1/2}$ se $\omega > \omega_p$. Nel caso $V \ll c$ per ottenere riflessione totale si può prendere una frequenza ω prossima (ma non inferiore) a ω_p .

c) Nelle relazioni precedenti l'indice di rifrazione va valutato alla frequenza $\omega'_0 = \gamma\omega_0$ nel sistema S' , ovvero $n = n(\omega'_0)$, il che introduce una dipendenza ulteriore da V in tutte le formule precedenti dove appare n (le direzioni delle onde in S non cambiano).

Ad esempio la condizione di riflessione totale diventa $n(\gamma\omega_0) = \beta$ che si può sviluppare al secondo ordine, essendo $\gamma \simeq 1 + \beta^2/2 + \mathcal{O}(\beta^3)$ come

$$n(\omega_0) + \frac{\beta^2}{2}\omega_0\partial_\omega n(\omega_0) = \beta, \quad (8)$$

che si può risolvere per β ottenendo una correzione al risultato in **b**).

2

a) All'interno della guida il campo elettrico soddisfa l'equazione d'onda nel vuoto $(c^2\nabla^2 - \partial_t^2)\mathbf{E} = 0$. Inserendo la soluzione proposta si ottiene l'equazione di Helmholtz

$$\left(\partial_y^2 - k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)f(y) = 0, \quad (9)$$

che ha soluzioni del tipo $f(y) = \cos(qy)$ e $f(y) = \sin(qy)$. Le condizioni al bordo impongono $E_y(y = \pm a/2) = 0$ per cui otteniamo

$$q_n = n\frac{\pi}{a}, \quad f(y) = \begin{cases} \cos(q_n y) & (n = 1, 3, 5 \dots) \\ \sin(q_n y) & (n = 2, 4, 6 \dots) \end{cases} \quad (10)$$

con la relazione

$$q_n^2 + k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (11)$$

Il vettore d'onda k è reale se $\omega > q_n c \equiv \omega_n$.

b) Con un indice di rifrazione $n = n(\omega)$ l'equazione di Helmholtz viene modificata come

$$\left(\partial_y^2 - k^2 + n^2(\omega)\frac{\omega^2}{c^2}\right)f(y) = 0, \quad (12)$$

ottenendo

$$q_n^2 + k^2 - n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} = 0 . \quad (13)$$

Nel caso di gas con elettroni liberi

$$q_n^2 + k^2 - \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} = 0 , \quad (14)$$

per cui le nuove frequenze di taglio si ottengono dalla somma in quadratura di ω_p con le frequenze del caso precedente:

$$\omega'_n = \sqrt{q_n^2 c^2 + \omega_p^2} . \quad (15)$$

c) Per il modo di propagazione con $n = 1$ alla frequenza ω possiamo scrivere

$$E_z = \begin{cases} (E_0 e^{ikx} + E_r e^{-ikx}) \cos(q_1 y) e^{-i\omega t} & (x < 0) , \\ E_t \cos(q_1 y) e^{ik_t x - i\omega t} & (x > 0) , \end{cases} \quad (16)$$

dove $k_t = (n(\omega)\omega^2/c^2 - q_1^2)^{1/2}$. La dipendenza da y deve essere la stessa per tutte le onde per consentire di soddisfare la condizione di continuità di E_y alla superficie $x = 0$, la quale fornisce la relazione

$$E_0 + E_r = E_t . \quad (17)$$

Una seconda relazione è data dalla continuità delle componenti del campo magnetico. Usando l'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ si ottiene

$$B_x = \frac{i\pi}{\omega a} \times \begin{cases} (E_0 e^{ikx} + E_r e^{-ikx}) \sin(q_1 y) e^{-i\omega t} & (x < 0) , \\ E_t \sin(q_1 y) e^{ik_t x - i\omega t} & (x > 0) , \end{cases} \quad (18)$$

$$B_y = -\frac{1}{\omega} \times \begin{cases} k (E_0 e^{ikx} - E_r e^{-ikx}) \cos(q_1 y) e^{-i\omega t} & (x < 0) , \\ k_t E_t \cos(q_1 y) e^{ik_t x - i\omega t} & (x > 0) , \end{cases} \quad (19)$$

La continuità di B_x è automaticamente soddisfatta dalla relazione precedente $E_0 + E_r = E_t$, quella di B_y fornisce $k(E_0 - E_r) = k_t E_t$. Si ottiene infine

$$E_r = \frac{k - k_t}{k + k_t} E_0 , \quad E_t = \frac{2k}{k + k_t} E_0 , \quad (20)$$

che non sono altro che le formule di Fresnel per la polarizzazione S : infatti il modo TE per la guida d'onda può essere visto come la sovrapposizione di due onde piane che incidono ad angoli opposti sulla superficie di separazione, con il campo elettrico parallelo alla superficie stessa.