

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2014-2015

Compito di Fisica 2 (25/05/2015)

1

Nel sistema del laboratorio S si consideri un condensatore piano le cui armature quadrate hanno area $A = L^2$ e sono poste a distanza $h \ll L$; gli effetti di bordo sono trascurabili. Sulle due armature si trovano rispettivamente le cariche $\pm Q$, uniformemente distribuite con densità superficiale $\pm\sigma = \pm Q/A$.

Dato un sistema di riferimento S' che si muove rispetto a S con velocità $\mathbf{V} = \beta c$ parallelamente alle armature del condensatore, si determinino in S'

- a) i campi elettrico e magnetico,
- b) le sorgenti dei campi elettrico e magnetico,
- c) la forza per unità di superficie e la forza totale sulle armature, confrontando i valori con quelli calcolati in S .

2

Un'onda elettromagnetica piana e monocromatica di ampiezza del campo elettrico E_i , frequenza ω e polarizzazione lungo $\hat{\mathbf{y}}$ incide perpendicolarmente su un mezzo semi-infinito che riempie il semispazio $x > 0$ ed è caratterizzato dall'indice di rifrazione complesso $\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 + i\mathbf{n}_2$.

- a) Scrivere l'espressione completa (cioè in tutto lo spazio) del campo elettrico $\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t)$, del campo magnetico $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, t)$ e della densità di corrente $\mathbf{J} = \mathbf{J}(x, t)$.
- b) Calcolare il flusso di energia alla superficie del mezzo e la densità di energia dissipata nel volume, entrambi mediati sul periodo di oscillazione. Si dica quali condizioni su $\mathbf{n}$ sono sufficienti affinché siano nulli rispettivamente il flusso di energia e l'energia dissipata.
- c) Calcolare il flusso di quantità di moto P attraverso la superficie $x = 0$ (ovvero la pressione di radiazione sul mezzo), mostrando che $P = (1 + |r|^2)I/c$ dove $r = (1 - \mathbf{n})/(1 + \mathbf{n})$. (Suggerimento: si ha $P = -\langle T_{xx}(0) \rangle$ dove T è il tensore degli stress di Maxwell; si usi questa formula, cercando di spiegare che essa esprime il flusso cercato. In alternativa si calcoli la forza totale sulle correnti e le cariche nel mezzo, o si usi un altro ragionamento ...)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Forza magnetica su un elemento infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} d^3x . \quad (2)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (3)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$[\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \partial_t(\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = \partial_j T_{ij} , \quad (4)$$

ovvero integrando sul volume entro una superficie chiusa A

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{mec}} + \mathbf{p}_{\text{EM}})_i = \int_A T_{ij} n_j dA , \quad (5)$$

dove T_{ij} è il tensore degli stress di Maxwell

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right] . \quad (6)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}) , \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) , \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp , \quad (7)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel , \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \beta \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel , \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \beta \times \mathbf{E}/c) . \quad (8)$$

dove $\mathbf{V} = \beta c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , e “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Formule di Fresnel per la riflessione e trasmissione ad incidenza perpendicolare sulla superficie di un mezzo

$$E_r = \frac{1-n}{1+n} E_i , \quad E_t = \frac{2}{1+n} E_i , \quad (9)$$

dove E_i , E_r ed E_t sono le ampiezze dell'onda riflessa e dell'onda nel mezzo, rispettivamente e n è l'indice di rifrazione del mezzo.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$:

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (10)$$

SOLUZIONI

1

a) Sia $\mathbf{V} = \beta c \hat{\mathbf{x}}$. In S l'unica componente non nulla del campo EM è $E_y = \sigma/\varepsilon_0$. Le trasformazioni di Lorentz danno in S'

$$E'_y = \gamma E_y = \gamma \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad B'_z = -\beta \gamma E_y / c = -\beta \gamma \frac{\sigma}{\varepsilon_0 c}. \quad (11)$$

b) Il campo E'_y è generato da una densità superficiale di carica $\sigma' = \varepsilon_0 E'_y = \gamma \sigma$. Similmente, il campo B'_z è generato da una densità superficiale di corrente lungo x , data da $j'_x = B'_z / \mu_0 = -\beta \gamma \sigma c$.

I risultati sono in accordo con l'osservazione che $(c\sigma, \mathbf{j})$ trasforma come un quadrivettore. Infatti possiamo pensare di avere una quadricorrente $J_\mu = (c\rho, \mathbf{J})$ distribuita in un sottile strato $|y| < \delta/2$, così che $\sigma = \rho\delta$ e $\mathbf{j} = \mathbf{J}\delta$. Poiché δ è invariante per trasformazioni con velocità parallela a $\mathbf{J}$, segue che $j_\mu \equiv J_\mu \delta$ trasforma come un quadrivettore:

$$\sigma' = \gamma(\sigma - \beta j_x / c) = \gamma \sigma, \quad j'_x = \gamma(j_x - \beta c \sigma) = -\beta \gamma \sigma c. \quad (12)$$

c) In S , sulla superficie interna delle armature esiste una forza per unità di superficie (ovvero una pressione elettrostatica) $P = \sigma E_y / 2 = \sigma^2 / 2\varepsilon_0$ diretta lungo la normale alla superficie, quindi le armature si attraggono. In S' , la forza per unità di superficie è la somma di due termini rispettivamente di pressione elettrostatica e magnetostatica,

$$P' = \frac{1}{2} \sigma' E'_y + \frac{1}{2} j'_x B'_z = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \gamma^2 - \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \beta^2 \gamma^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \gamma^2 (1 - \beta^2) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = P. \quad (13)$$

L'invarianza di P è confermata dal fatto che possiamo anche scrivere

$$P' = \frac{\varepsilon_0}{2} E'^2_y - \frac{1}{2\mu_0} B'^2_z = \varepsilon_0 (E'^2_y - c^2 B'^2_z), \quad (14)$$

che è un invariante di Lorentz.

In S , la forza totale è $F = PA$. In S' , per effetto della contrazione di Lorentz si ha $A' = (L/\gamma)L = A/\gamma$, per cui $F' = P'A' = PA/\gamma = F/\gamma$.

2

a) Usando le formule di Fresnel (9) per le ampiezze del campo riflesso E_r e trasmesso E_t , otteniamo

$$E_y = \begin{cases} E_i e^{ikx - i\omega t} + \frac{1-n}{1+n} E_i e^{-ikx - i\omega t} & (x < 0), \\ \frac{2}{1+n} E_i e^{ik_t x - i\omega t} & (x > 0), \end{cases} \quad (15)$$

dove $k = \omega/c$ e $k_t = kn$.

Il campo magnetico è dato da

$$B_z = \begin{cases} \frac{E_i}{c} e^{ikx - i\omega t} - \frac{1-n}{1+n} \frac{E_i}{c} e^{-ikx - i\omega t} & (x < 0), \\ \frac{2n}{1+n} \frac{E_i}{c} e^{ik_t x - i\omega t} & (x > 0), \end{cases} \quad (16)$$

come si può verificare usando $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$, ovvero $-i\omega B_z = -\partial_x E_y$.

La densità di corrente può essere ricavata da $\mu_0 \mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B} - \partial_t \mathbf{E}/c^2$ ovvero $\mu_0 J_y = -\partial_x B_z + (i\omega/c^2)E_y$. Ovviamente $\mathbf{J} = 0$ per $x < 0$, mentre per $x > 0$ si ottiene

$$\mu_0 J_y = \left(-i \frac{k\mathbf{n}}{c} \frac{2\mathbf{n}}{1+\mathbf{n}} + i \frac{\omega}{c^2} \frac{2}{1+\mathbf{n}} \right) E_i e^{ik_t x - i\omega t} = -i \frac{\omega}{c^2} \frac{2(\mathbf{n}^2 - 1)}{1+\mathbf{n}} E_i e^{ik_t x - i\omega t}, \quad (17)$$

ovvero

$$J_y = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{n}^2 - 1)E_t e^{ik_t x - i\omega t}. \quad (18)$$

Allo stesso risultato si può arrivare scrivendo direttamente $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ ovvero $J_y = \sigma E_t e^{ik_t x - i\omega t}$ dove $\sigma = -i\omega\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1) = -i\omega\varepsilon_0(\mathbf{n}^2 - 1)$.

b) Il flusso di energia è dato dal valor medio del vettore di Poynting in $x = 0$:

$$\langle S_x \rangle = \langle \varepsilon_0 c^2 (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_x \rangle = \varepsilon_0 c^2 \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{2}{1+\mathbf{n}} E_i \frac{2\mathbf{n}^*}{1+\mathbf{n}^*} \frac{E_i^*}{c} \right) = \frac{2\varepsilon_0 c |E_i|^2}{|1+\mathbf{n}|^2} \text{Re}(\mathbf{n}^*). \quad (19)$$

Si ha quindi $\langle S_x \rangle = 0$ se $\text{Re}(\mathbf{n}^*) = \text{Re}(\mathbf{n}) = 0$, cioè se $\mathbf{n}$ è immaginario puro.

La densità di energia dissipata è data da

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(-2i\omega\varepsilon_0 \frac{\mathbf{n}^2 - 1}{1+\mathbf{n}^*} |E_i|^2 \right). \quad (20)$$

Se $\mathbf{n}$ è reale, si ha $\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = 0$.

c) Il flusso di quantità di moto è dato dalla componente xx del tensore degli stress:

$$P = -\langle T_{xx}(0) \rangle = \left\langle \frac{1}{2} [\mathbf{E}^2(0) + c^2 \mathbf{B}^2(0)] \right\rangle = \frac{1}{4} \left(\frac{4}{|1+\mathbf{n}|^2} + \frac{4|\mathbf{n}|^2}{|1+\mathbf{n}|^2} \right) |E_i|^2 = \frac{1+|\mathbf{n}|^2}{|1+\mathbf{n}|^2} |E_i|^2. \quad (21)$$

Poiché

$$1 + |r|^2 = 1 + \frac{|1-\mathbf{n}|^2}{|1+\mathbf{n}|^2} = \frac{|1+\mathbf{n}|^2 + |1-\mathbf{n}|^2}{|1+\mathbf{n}|^2} = \frac{(1+\mathbf{n})(1+\mathbf{n})^* + (1-\mathbf{n})(1-\mathbf{n})^*}{|1+\mathbf{n}|^2} = \frac{2(1+|\mathbf{n}|^2)}{|1+\mathbf{n}|^2} \quad (22)$$

e $I = \varepsilon_0 c |E_i|^2 / 2$, si ottiene la relazione cercata.