

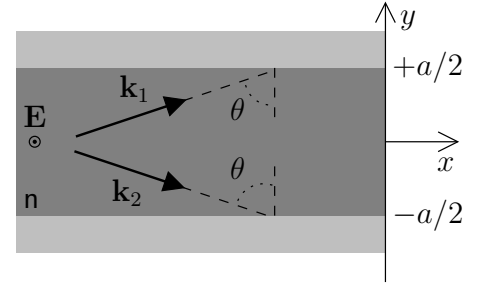
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2015-2016

Compito di Fisica 2 (30/05/2016)

1

Si schematizza una fibra ottica come una lamina infinita di larghezza a composta da materiale con indice di rifrazione reale e positivo $n > 1$ (per le frequenze di interesse) che occupa la regione $|y| < a/2$, immersa in un mezzo di indice di rifrazione unitario. Nella fibra si propaga lungo $\hat{\mathbf{x}}$ un campo elettromagnetico monocromatico di frequenza ω il cui campo elettrico ha solo la componente z che può essere scritta in notazione complessa come



$$E = E_z(x, y, t) = E_1 e^{i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t} + E_2 e^{i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t} = E_1 e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t} + E_2 e^{ik_x x - ik_y y - i\omega t}, \quad (1)$$

dove $\mathbf{k}_1 = (k_x, k_y) = k(\sin \theta, \cos \theta)$, $\mathbf{k}_2 = (k_x, -k_y) = k(\sin \theta, -\cos \theta)$, ed $\mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0$.

a) Scrivere la relazione tra k e ω e determinare l'intervallo di valori di θ per cui il campo si propaga nella fibra senza perdita di energia attraverso le pareti a $|y| = a/2$. Si dia anche l'espressione completa del campo magnetico $\mathbf{B}$. (10 punti)

b) Usando il fatto che in condizioni di *riflessione totale* all'interfaccia di separazione tra due mezzi il coefficiente di riflessione (formula di Fresnel) può essere scritto $r = E_r/E_i = e^{i\delta}$ con δ reale, dimostrare la seguente relazione implicita che determina k_y

$$k_y a + \delta = m\pi \quad (m = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

e scrivere la relazione che determina le frequenze di taglio della fibra. Determinare esplicitamente i valori di k_y nel limite in cui $n \sin \theta \gg 1$ e $\theta \rightarrow \pi/2$. Si dica anche cosa cambia nel caso in cui $\mathbf{E}$ giaccia nel piano xy . (10 punti)

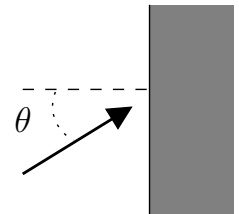
2

Un'onda elettromagnetica piana e monocromatica di frequenza ω e ampiezza del campo elettrico E_0 incide ad angolo θ su uno specchio perfetto nel sistema del laboratorio R .

a) Determinare un sistema di riferimento R' in cui l'onda incide perpendicolarmente sullo specchio. (5 punti)

b) Calcolare le ampiezze dei campi in R' sia per polarizzazione S che P , verificando che in R' i campi rimangono trasversali e di ampiezza tale che $E' = cB'$. (5 punti)

c) Dare l'espressione della pressione di radiazione P' sullo specchio in R' , mostrando poi che $P' = P$ dove P è la pressione nel sistema R . (5 punti)



NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; risultati dati senza commento non saranno considerati.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (3)$$

Formule di Fresnel per la riflessione e trasmissione all'interfaccia piana di separazione tra due mezzi aventi indice di rifrazione n_1 e n_2 (con eguali permittività magnetiche $\mu_1 = \mu_2$): Polarizzazione S (campo elettrico perpendicolare al piano d'incidenza)

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{k_{i\perp} - k_{t\perp}}{k_{i\perp} + k_{t\perp}} = \frac{n_1 \cos \theta_i - (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2}}{n_1 \cos \theta_i + (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2}}, \quad (4)$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2k_{i\perp}}{k_{i\perp} + k_{t\perp}} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + (n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2}} \quad (5)$$

Polarizzazione P (campo elettrico parallelo al piano d'incidenza)

$$\frac{E_r}{E_i} = \frac{n_2^2 k_{i\perp} - n_1^2 k_{t\perp}}{n_2^2 k_{i\perp} + n_1^2 k_{t\perp}} = \frac{n_2^2 \cos \theta_i - n_1(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2}}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2}}, \quad (6)$$

$$\frac{E_t}{E_i} = \frac{2n_1 n_2 k_{i\perp}}{n_2^2 k_{i\perp} + n_1^2 k_{t\perp}} = \frac{n_1 n_2 \cos \theta_i}{n_2^2 \cos \theta_i + n_1(n_2^2 - n_1^2 \sin^2 \theta_i)^{1/2}}, \quad (7)$$

dove E_i , E_r sono le ampiezze delle onde incidente e riflessa nel mezzo 1, E_t l'ampiezza dell'onda trasmessa (rifratta) nel mezzo 2, $\mathbf{k}_i$ e $\mathbf{k}_t$ sono i vettori d'onda per le onde incidente e trasmessa, $\perp$ indica la direzione perpendicolare alla superficie di separazione, e θ_i è l'angolo di incidenza.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (8)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\beta = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (9)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (10)$$

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \beta \times \mathbf{B}c), \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \beta \times \mathbf{E}/c), \quad (11)$$

dove $\mathbf{V} = \beta c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Trasformazione di Lorentz della forza “Newtoniana”

$$F'_\parallel = F_\parallel - \frac{V \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_\perp / c^2}{1 - V v_\parallel / c^2}, \quad F'_\perp = \frac{\mathbf{F}_\perp}{\gamma(1 - V v_\parallel / c^2)}, \quad (12)$$

dove $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ nel sistema S e $\mathbf{F}' = d\mathbf{p}'/dt'$ nel sistema S' in moto con velocità $\mathbf{V}$ rispetto a S , $\mathbf{v}$ è la velocità del corpo, “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Pressione esercitata da un'onda elettromagnetica piana con campo $\mathbf{E} = \text{Re}(\mathbf{E}_i e^{ikx - i\omega t})$ su uno specchio perfetto, a incidenza normale

$$P = 2I/c, \quad I = \varepsilon_0 c^2 |\langle \mathbf{E} \times \mathbf{B} \rangle| = \varepsilon_0 c |E_i|^2 / 2 \quad (13)$$

SOLUZIONI

1

a) Il campo $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1(x, y, t) + \mathbf{E}_2(x, y, t)$ può essere visto come la somma di due onde piane propagantesi nel mezzo con stessa frequenza e vettori d'onda diversi $\mathbf{k}_1$ e $\mathbf{k}_2$. La relazione di dispersione è allora per entrambe le onde piane

$$\omega = \frac{kc}{n(\omega)} . \quad (14)$$

Ogni onda incide sull'interfaccia mezzo-vuoto ad angolo θ . La condizione di riflessione totale si ottiene allora dalla legge di Snell,

$$\sin \theta > \frac{1}{n} . \quad (15)$$

Il campo magnetico può essere ottenuto da $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$. Per campi oscillanti complessi

$$-i\omega \mathbf{B} = -(\hat{\mathbf{x}}\partial_y - \hat{\mathbf{y}}\partial_x)E_z , \quad (16)$$

$$(17)$$

da cui

$$B_x = \frac{k_y}{\omega} (E_1 e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t} - E_2 e^{ik_x x - ik_y y - i\omega t}) , \quad (18)$$

$$B_y = -\frac{k_x}{\omega} (E_1 e^{ik_x x + ik_y y - i\omega t} + E_2 e^{ik_x x - ik_y y - i\omega t}) , \quad (19)$$

dove $k_x/\omega = n \sin \theta/c$, $k_y/\omega = n \cos \theta/c$.

b) Per riflessione interna alle superfici l'onda "1" diventa l'onda "2" e viceversa, quindi le ampiezze alle superfici sono legate dall'opportuno coefficiente di riflessione di Fresnel:

$$E_2(x, y = +a/2, t) = r E_1(x, y = +a/2, t) , \quad E_1(x, y = -a/2, t) = r E_2(x, y = -a/2, t) . \quad (20)$$

Per riflessione totale non si ha trasmissione di energia oltre la superficie per cui le ampiezze dei campi incidente e trasmesso sono uguali a meno di uno sfasamento. Per polarizzazione S il coefficiente di Fresnel può essere scritto come

$$r = \frac{n \cos \theta - i(n^2 \sin^2 \theta - 1)^{1/2}}{n \cos \theta + i(n^2 \sin^2 \theta - 1)^{1/2}} \quad (21)$$

da cui è evidente che se $n \sin \theta > 1$ allora $|r| = 1$. Si ottiene per lo sfasamento

$$\tan \frac{\delta}{2} = -\frac{(n^2 \sin^2 \theta - 1)^{1/2}}{n \cos \theta} \quad (22)$$

Le condizioni di riflessione a $y = \pm a/2$ danno rispettivamente

$$E_2 e^{-ik_y a/2} = E_1 e^{+ik_y a/2} e^{i\delta} , \quad E_1 e^{-ik_y a/2} = E_2 e^{+ik_y a/2} e^{i\delta} , \quad (23)$$

da cui

$$e^{-ik_y a} - e^{+ik_y a} e^{2i\delta} = 0 , \quad (24)$$

ovvero

$$2k_y a + 2\delta = 2m\pi , \quad m = 0, 1, 2, \dots . \quad (25)$$

La relazione implicita che determina le frequenze di taglio è

$$k_x^2 = \frac{\omega^2}{c^2} n^2 - k_y^2 > 0 . \quad (26)$$

Se $n \sin \theta \gg 1$ si ha $\delta \simeq -2\theta$, e se $\theta \rightarrow \pi/2$

$$k_y \rightarrow (m+1) \frac{\pi}{a} . \quad (27)$$

Per polarizzazione P (cioè per $\mathbf{E}$ nel piano xy) valgono gli stessi ragionamenti, cambia solo la forma esplicita di $\mathbf{r}$.

2

a) Sia $\hat{\mathbf{x}}$ la normale allo specchio e xy il piano di incidenza. Si ha

$$k_y = \frac{\omega}{c} \sin \theta . \quad (28)$$

Sia $\beta = \beta \hat{\mathbf{y}}$. Le trasformazioni di Lorentz del quadrivettore $(\omega/c, \mathbf{k})$ danno

$$k'_y = \gamma(k_y - \beta \frac{\omega}{c}) = \gamma \frac{\omega}{c} (\sin \theta - \beta) . \quad (29)$$

Si ha $k'_y = 0$, cioè incidenza normale in R' , per $\sin \theta = \beta$.

b) Per polarizzazione S le ampiezze dei campi dell'onda incidente sono

$$\mathbf{E} = (0, 0, E_0) , \quad c\mathbf{B} = (E_0 \sin \theta, E_0 \cos \theta, 0) , \quad (30)$$

Applicando le trasformazioni dei campi

$$E'_z = \gamma(E_z - \beta c B_x) = \gamma E_0 (1 - \sin^2 \theta) = E_0 \cos \theta , \quad (31)$$

$$B'_x = \gamma(B_x - \beta E_z/c) = \gamma(E_0 \sin \theta - \sin \theta E_0)/c = 0 , \quad (32)$$

$$B'_y = B_y = E_0 \cos \theta / c , \quad (33)$$

essendo $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} = (1 - \sin^2 \theta)^{1/2} = 1/\cos(\theta)$. Si ha $B'_x = 0$ essendo l'onda trasversale. In modulo $B' = E'c$.

Per polarizzazione P si ha, analogamente,

$$c\mathbf{B} = (0, 0, E_0) , \quad \mathbf{E} = (-E_0 \sin \theta, -E_0 \cos \theta, 0) , \quad (34)$$

$$B'_z = \gamma(B_z + \beta E_x/c) = \gamma E_0 (1 - \sin^2 \theta)/c = E_0 \cos \theta , \quad (35)$$

$$E'_x = \gamma(E_x + \beta B_z/c) = \gamma(-E_0 \sin \theta + \sin \theta E_0) = 0 , \quad (36)$$

$$E'_y = E_y = -E_0 \cos \theta . \quad (37)$$

c) In R' l'incidenza è normale e quindi $P' = 2I'/c$. Poiché $I \propto E^2 = c^2 B^2$, in R' si ha $I' = I \cos^2 \theta$ e quindi $P' = 2I'/c = (2I/c) \cos^2 \theta$.

Si può dedurre che $P' = P$ osservando che per la forza Newtoniana totale sullo specchio $F' = F/\gamma$ mentre la superficie $A' = A/\gamma$, quindi $P' = F'/A' = F/A = P$. Segue che $P = (2I/c) \cos^2 \theta$.