

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2016-2017

Compito di Fisica 2 (24/05/2017)

1

Un plasma di idrogeno completamente ionizzato è costituito da elettroni di massa m_e e carica $-e$ e da protoni di massa $m_p \gg m_e$ e carica $+e$. Le densità di particelle delle due specie sono uguali ($n_e = n_p = n$ ed effetti di attrito sul moto di entrambe le specie sono trascurabili).

a) Determinare la permittività dielettrica per onde elettromagnetiche trasversali nel gas ionizzato, tenendo conto di entrambe le specie e determinando eventuali regioni di frequenza in cui le onde elettromagnetiche non possono propagarsi.

b) Rispondere alle domande del punto **a)** per onde trasversali che si propagano in un plasma come al punto **a)** ma immerso in un campo magnetico statico $\mathbf{B}_0$, nel caso di propagazione in direzione parallela a $\mathbf{B}_0$. Si discuta la comparsa di risonanze e la dipendenza dal verso di polarizzazione dell'onda. (Si consiglia di assumere polarizzazione circolare.)

c) Rispondere alle domande dei punti **a)** e **b)** per un plasma costituito da elettroni e positroni (carica $+e$, massa m_e) aventi eguali densità, discutendo in particolare la dipendenza dalla polarizzazione.

2

Un condensatore nel sistema S del laboratorio è costituito da due armature metalliche piane e parallele di area A , sulle quali si trovano rispettivamente le cariche libere $\pm Q$, uniformemente distribuite. Gli effetti di bordo sono trascurabili.

Si consideri il sistema S' in moto rispetto a S con velocità $\mathbf{v}$ parallela alle superficie delle armature. Calcolare

a) i campi elettrico e magnetico in S' e le loro sorgenti, ovvero le densità di carica e di corrente;

b) la forza tra le armature in S' , mostrando in particolare che la forza per unità di superficie è uguale a quella in S , e giustificando il risultato;

c) l'energia e la quantità di moto associata ai campi all'interno del condensatore, in S e S' .

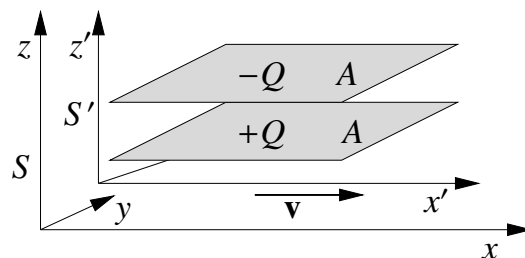


Figura 1:

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (1)$$

Definizione di permittività dielettrica ε_r per un mezzo lineare

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} , \quad \varepsilon_r = 1 + \chi , \quad \varepsilon_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r , \quad (2)$$

dove $\mathbf{P}$ è la densità di polarizzazione (momento di dipolo per unità di volume) e in generale $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$.

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (3)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$[\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \partial_t(\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = \partial_j T_{ij} , \quad (4)$$

dove T_{ij} è il tensore degli stress di Maxwell

$$T_{ij} = \varepsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right] . \quad (5)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}) , \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0) , \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp , \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\boldsymbol{\beta} = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x , \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c) , \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c) , \quad (7)$$

$$B'_x = B_x , \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c) , \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c) . \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) Le suscettività si sommano (dato che la polarizzazione è additiva)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{Pp}^2}{\omega^2} , \quad (9)$$

dove $\omega_{Pe}^2 = ne^2/m_e\varepsilon_0$ e $\omega_{Pp}^2 = ne^2/m_p\varepsilon_0$. Dato che $m_p \simeq 1836m_e$ l'effetto dei protoni è trascurabile.

b) Con la consueta trattazione si ottiene a seconda del segno della polarizzazione

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Ce})} - \frac{\omega_{Pp}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{Cp})} , \quad (10)$$

dove $\omega_{Ce} = eB_0/m_e$ e $\omega_{Cp} = eB_0/m_p$. Si ha sempre una risonanza di ciclotrone per ogni polarizzazione, ma per frequenze molto diverse. In generale si ha dipendenza dalla polarizzazione (birifrangenza).

c) Le frequenze di ciclotrone e di plasma sono le stesse per elettroni e positroni.

In assenza di campo magnetico

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{2\omega_{Pe}}{\omega^2} . \quad (11)$$

In presenza di campo magnetico

$$\begin{aligned} \varepsilon(\omega) &= 1 - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega(\omega \mp \omega_{Ce})} - \frac{\omega_{Pe}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{Ce})} \\ &= 1 - \frac{2\omega_{Pe}^2\omega}{\omega^2 - \omega_{Ce}^2} . \end{aligned} \quad (12)$$

Si ha una risonanza per entrambi i versi di polarizzazione ma scompare la birifrangenza.

2

Sia $\sigma = Q/A$ la densità di carica superficiale. Mentre nel sistema S abbiamo il solo campo elettrico $E = \sigma/\varepsilon_0$, nel sistema S' abbiamo i campi

$$\mathbf{B}' = -\gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} = -\gamma \frac{v}{c^2} E \hat{\mathbf{z}} , \quad \mathbf{E}' = \gamma \mathbf{E} , \quad (13)$$

e le densità di carica e corrente superficiali valgono

$$\sigma' = \gamma\sigma , \quad \iota' = -\gamma\sigma\mathbf{v} , \quad (14)$$

con le relazioni

$$E' = \sigma'/\varepsilon_0 , \quad B' = \mu_0\iota' . \quad (15)$$

b) Nel sistema S la forza per unità di superficie sulle armature è attrattiva e data in modulo da

$$P = \frac{1}{2}\sigma E = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} , \quad (16)$$

mentre in S' abbiamo

$$P' = \frac{1}{2}(\sigma' E' - \iota' B') = \frac{1}{2} \left(\gamma^2 \sigma E - \gamma^2 \frac{v^2}{c^2} \sigma E \right) = \frac{1}{2} \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \sigma E = \frac{1}{2} \sigma E = P . \quad (17)$$

Si ha $P = P'$ in quanto possiamo scriverle in funzione dell'invariante $E^2 - c^2 B^2$. Per le forze

$$F = P A , \quad F' = P' A' = P(A/\gamma) = F/\gamma . \quad (18)$$

c) In S si ha

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 , \quad \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0 , \quad (19)$$

mentre in S'

$$u' = \frac{\varepsilon_0}{2} E'^2 + \frac{1}{2\mu_0} B'^2 = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 \gamma^2 (1 + \beta^2) , \quad (20)$$

$$\mathbf{g}' = \varepsilon_0 \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = \varepsilon_0 \gamma \mathbf{E} \times \left(-\gamma \frac{\mathbf{v}}{c^2} \times \mathbf{E} \right) = -\varepsilon_0 E^2 \frac{\gamma^2 \mathbf{v}}{c^2} . \quad (21)$$