

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2017-2018

Compito di Fisica 2 (21/05/2018)

1

Nel sistema S del laboratorio si trova un cavo coassiale infinito, formato da un filo conduttore interno avente raggio a e un conduttore cilindrico esterno avente raggio $b > a$. Sul conduttore interno c'è una densità lineare di carica λ e scorre la corrente totale I , entrambe costanti e uniformemente distribuite sulla superficie $r = a$; corrispondentemente, sulla superficie del conduttore esterno $r = b$ abbiamo la densità lineare $-\lambda$ e la corrente $-I$.

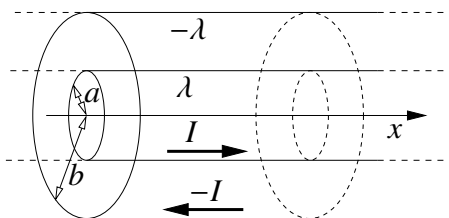


Figura 1

a) A seconda del valore del rapporto I/λ , determinare un sistema di riferimento S' in moto con velocità V parallela all'asse del cavo, tale che una o l'altra tra le due quantità I' e λ' sia nulla.

Per entrambi i casi del punto **a)** calcolare in S e S'

- b)** i campi elettrico e magnetico, verificando le loro leggi di trasformazione tra i due sistemi;
- c)** la pressione (forza per unità di area) sulle superfici dei due conduttori, specificandone il segno;
- d)** le densità di energia e di quantità di moto elettromagnetiche.

2

Un'onda elettromagnetica piana e monocromatica avente frequenza ω e ampiezza del campo elettrico E_0 incide obliquamente sulla superficie di un mezzo semi-infinito (che occupa il semispazio $x > 0$) avente indice di rifrazione reale $n = n(\omega) > 0$. L'onda è polarizzata nel piano di incidenza (xy) e incide all'angolo di Brewster $\theta_B = \arctan(n)$ così che non si ha onda riflessa.

a) Si diano le ampiezze dei campi elettrico e magnetico dell'onda trasmessa.

b) Si mostri che il flusso (mediato sul periodo) del vettore di Poynting $\mathbf{S} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ è conservato attraverso la superficie.

c) Si mostri che sulla superficie esiste una densità di carica superficiale e se ne calcoli il valore.

d) Calcolare la pressione elettromagnetica (mediata sul periodo) sulla superficie.

Si assuma ora che il mezzo non sia infinito ma esteso lungo x per una lunghezza d .

e) Scrivere le espressioni dei campi elettromagnetici in tutto lo spazio, giustificando la risposta.

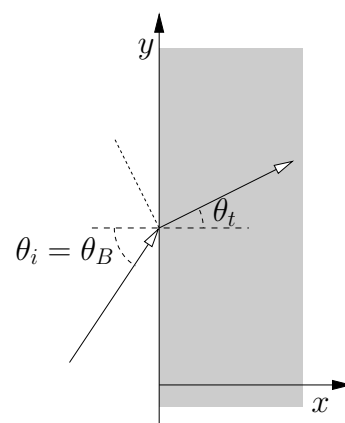


Figura 2

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0, \quad (2)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$[\rho \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \partial_t(\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})]_i = -\partial_j T_{ij}, \quad (3)$$

ovvero integrando sul volume entro una superficie chiusa A

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{p}_{\text{mec}} + \mathbf{p}_{\text{EM}})_i = \int_A T_{ij} n_j dA, \quad (4)$$

dove

$$T_{ij} = -\varepsilon_0 \left[E_i E_j + c^2 B_i B_j - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) \delta_{ij} \right]. \quad (5)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c), \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (7)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , e “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*), \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2. \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) Scegliamo un sistema di coordinate cartesiane S solidale con il laboratorio, con l'asse x lungo l'asse del cavo coassiale. Partiamo dalla quadricorrente del conduttore interno $J^\alpha = (c\rho, \mathbf{J})$ e integriamo sul piano yz , ottenendo il quadrivettore $G^\alpha = (c\lambda, \mathbf{I})$. Notare che G^α è un quadrivettore in quanto la sezione trasversale è invariante per trasformazioni lungo la direzione di $\mathbf{J}$, ovvero lungo x .

In un sistema S' che rispetto a S si muova con velocità V diretta lungo x abbiamo dalle trasformazioni di Lorentz, ponendo come al solito $\gamma = 1/\sqrt{1 - V^2/c^2}$,

$$\lambda' = \gamma \left(\lambda - \frac{VI}{c^2} \right), \quad I' = \gamma (I - V\lambda). \quad (9)$$

Le condizioni $\lambda' = 0$ e $I' = 0$ richiedono quindi che il sistema in moto viaggi a velocità, rispettivamente,

$$V_{0\lambda} = \frac{\lambda c^2}{I}, \quad \text{e} \quad V_{0I} = \frac{I}{\lambda}. \quad (10)$$

Dovendo essere $V < c$, potremo trovare un sistema di riferimento $S'_{0\lambda}$ con $\lambda' = 0$ solo se $I/\lambda > c$, mentre, se $I/\lambda < c$ potremo avere un sistema S'_{0I} con $I' = 0$. Avremo quindi nei due casi

$$\lambda' = 0, \quad I' = \gamma \left(\frac{I^2 - \lambda^2 c^2}{I} \right) = \frac{I}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{I}{\sqrt{I^2 - \lambda^2 c^2}} \quad \text{in } S'_{0\lambda}, \quad (11)$$

$$I' = 0, \quad \lambda' = \gamma \left(\frac{\lambda^2 c^2 - I^2}{\lambda c^2} \right) = \frac{\lambda}{\gamma}, \quad \gamma = \frac{\lambda c}{\sqrt{\lambda^2 c^2 - I^2}} \quad \text{in } S'_{0I}. \quad (12)$$

b) Nel sistema del laboratorio S abbiamo

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\boldsymbol{\phi}}. \quad (13)$$

Se $I/\lambda > c$ avremo nel sistema S'_{0I} , con $V = I/\lambda$ (tenendo conto che $r' = r$)

$$E'_r = \gamma (E_r - V B_\phi) = \frac{\lambda'}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{E_r}{\gamma}, \quad B'_\phi = \gamma \left(B_\phi - \frac{V}{c^2} E_r \right) = 0, \quad (14)$$

l'ultimo risultato poteva essere ottenuto anche considerando che in S'_{0I} abbiamo $I' = 0$.

Se invece $I/\lambda < c$, nel sistema $S'_{0\lambda}$ che viaggia con velocità $\lambda c^2/I$

$$E'_r = \gamma (E_r - V B_\phi) = \gamma \left(\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{\lambda c^2}{I} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right) \hat{\mathbf{r}} = 0, \quad B'_\phi = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{B_\phi}{\gamma}, \quad (15)$$

il primo risultato coerente con il fatto che $\lambda' = 0$.

c) In S la forza elettrostatica per unità di superficie sul conduttore interno è

$$P_{\text{es}}(a) = \frac{1}{2} \sigma E(a) = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{2\pi a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} = \frac{\lambda^2}{8\pi^2\epsilon_0 a^2} = \frac{\epsilon_0}{2} E^2(a^+) \quad (16)$$

diretta verso l'esterno, mentre la forza magnetica per unità di superficie è

$$P_{\text{mag}}(a) = \frac{1}{2} \mathbf{K} \times \mathbf{B}(a^+) \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{2} \frac{I}{2\pi a} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} = -\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 a^2} = -\frac{B^2(a^+)}{2\mu_0} = -\frac{\epsilon_0}{2} c^2 B^2(a^+) \quad (17)$$

ricordando che $\mu_0 = 1/(\varepsilon_0 c^2)$. La forza è quindi diretta verso l'interno. La forza per unità di superficie complessiva è quindi

$$P(a) = P_{\text{es}}(a) + P_{\text{mag}}(a) = \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^2 a^2} (\lambda^2 c^2 - I^2) = \frac{\varepsilon_0}{2} [E^2(a^+) - c^2 B^2(a^+)] \quad (18)$$

ed è quindi invariante. Un ragionamento identico per il conduttore esterno porta a

$$P(b) = -\frac{\varepsilon_0}{2} [E^2(b^-) - c^2 B^2(b^-)] \quad (19)$$

I conduttori tendono quindi a respingersi a causa del termine dovuto al campo magnetico ed ad attrarsi a causa del termine elettrico. Se $\lambda c > I$, l'effetto netto è di attrazione (ovvero il conduttore interno tende ad espandersi e quello esterno a implodere); se $\lambda c < I$, si ha repulsione.

Le (18-19) possono essere ottenute anche ricordando che la densità volumica di energia elettrica è $\varepsilon_0 E^2/2$, ed è uguale alla forza per unità di superficie. La densità volumica di energia magnetica è $B^2/(2\mu_0)$, il segno meno nella forza per unità di superficie deriva dal fatto che è necessario un generatore di corrente per mantenere la corrente costante, e nel bilancio energetico va tenuto in considerazione anche il lavoro del generatore, uguale a meno il doppio della variazione di energia magnetica.

d) Nel sistema S del laboratorio la densità volumica complessiva di energia e la densità volumica di quantità di moto elettromagnetica nella zona $a < r < b$ sono, rispettivamente,

$$u = \left(\frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{8\pi^2 \varepsilon_0 r^2} \left(\lambda^2 + \frac{I^2}{c^2} \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\lambda I}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^2 r^2} \hat{\mathbf{z}}. \quad (21)$$

In S'_{0I} abbiamo

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2} E'^2, \quad \text{con } B' = 0 \quad (22)$$

mentre in $S'_{0\lambda}$ abbiamo

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B'^2, \quad \text{con } E' = 0, \quad (23)$$

mentre abbiamo $\mathbf{g}' = 0$ in entrambi i casi.

2

a) Basta osservare che $\mathbf{B}$ è continuo, per cui l'ampiezza del campo magnetico dell'onda trasmessa è $B_t = B_i = B_0 = E_0/c$, mentre l'ampiezza del suo campo elettrico è $E_t = B_t/v_f = E_0/n$, dove v_f è la velocità di fase nel mezzo.

b) Per $x < 0$, cioè nel vuoto, il vettore di Poynting mediato su un periodo è $|\bar{S}| = \varepsilon_0 c E_0^2$ (per comodità indichiamo le quantità mediate sul periodo come "barrate"), mentre nel mezzo, $x > 0$, abbiamo $|\bar{S}| = \varepsilon_0 c E_0^2/n$. La discontinuità del flusso di energia attraverso la superficie di separazione è data dalla differenza tra le componenti x del vettore di Poynting

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \bar{S}_x(0^+) - \bar{S}_x(0^-) = \bar{S}(0^+) \cos \theta_t - \bar{S}(0^-) \cos \theta_i = \frac{1}{n} \bar{S}(0^-) \cos(\theta_B - \pi/2) - \bar{S}(0^-) \cos \theta_B \\ &= \bar{S}(0^-) \left(-\frac{\sin \theta_B}{n} - \cos \theta_B \right) \end{aligned} \quad (24)$$

essendo $\theta_i = \theta_B$ e $\theta_i + \theta_t = \pi/2$ (θ_i è l'angolo di incidenza, pari all'angolo di Brewster θ_B , mentre θ_t è l'angolo di trasmissione). Dalla legge di Snell abbiamo

$$\frac{\sin \theta_B}{n} = \sin \theta_t = \cos \theta_i = -\cos \theta_B \quad (25)$$

da cui otteniamo $\Phi_E = 0$.

c) Per la densità superficiale di carica abbiamo dal teorema di Gauss

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = E_x(0^+) - E_x(0^-) = E_0 \sin \theta_i - E_t \sin \theta_t = E_0 \sin \theta_i \left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \quad (26)$$

essendo

$$E_x(0^-) = -E_0 \sin \theta_i \quad \text{e} \quad E_x(0^+) = -E_t \sin \theta_t = \frac{E_0}{n} \frac{\sin \theta_i}{n} = -E_0 \frac{\sin \theta_i}{n^2}. \quad (27)$$

d) La differenza tra i flussi di quantità di moto EM attraverso la superficie è dato da

$$\Phi_P = \bar{T}_{xx}(0^+) - \bar{T}_{xx}(0^-) = -\frac{\varepsilon_0}{2} [E_x^2(0^+) - E_x^2(0^-)], \quad (28)$$

essendo E_y e B_z continui all'interfaccia. La pressione è quindi “elettrostatica” ovvero

$$\Phi_P = \frac{1}{2} \sigma (E_x(0^+) + E_x(0^-)). \quad (29)$$

e)

La reversibilità dei cammini ottici e la simmetria del problema impongono che non ci sia riflessione neanche a $x = d$, quindi i campi dell'onda uscente a $x = d$ sono uguali ai campi dell'onda entrante a $x = 0$, a parte uno sfasamento ϕ . Tenendo conto della continuità di $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$ abbiamo

$$B_z = \frac{E_0}{c} e^{ik \sin \theta_B y - i\omega t} \times \begin{cases} e^{ik \cos \theta_B x} & (x < 0) \\ e^{ink \cos \theta_t x} & (0 < x < d) \\ e^{ik \cos \theta_B x + i\phi} & (x > d) \end{cases} \quad (30)$$

dove lo sfasamento è dato dalla condizione $B_z(x = d^-) = B_z(x = d^+)$ e quindi vale $\phi = kd(n \cos \theta_t - \cos \theta_B)$.

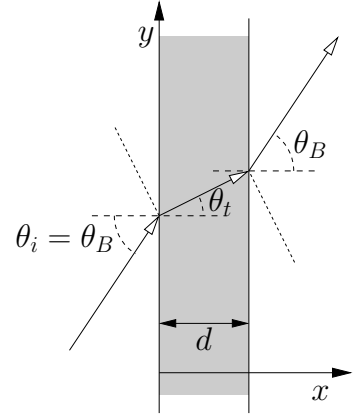


Figura 3