

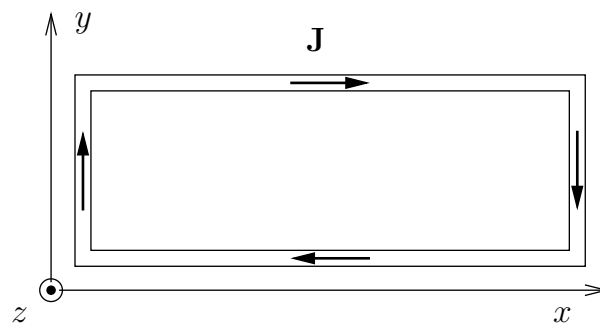
Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2018-2019

Compito di Fisica 2 (28/05/2019)

1

Si consideri una lamina rettangolare come in figura, di spessore d (molto minore della lunghezza dei lati) e infinitamente estesa in direzione z , in quiete nel sistema del laboratorio S . Nella lamina scorre la densità di corrente costante e uniforme $\mathbf{J}$. Applicando il teorema di Ampère, si trova che il campo magnetico è dato da $\mathbf{B} = \mu_0 J d \hat{\mathbf{z}}$ all'interno della lamina ed è nullo fuori.



Si consideri ora la lamina vista in un sistema S' in moto uniforme rispetto a S con velocità $\mathbf{V} = V \hat{\mathbf{x}} = \beta c \hat{\mathbf{x}}$.

- Usando le opportune trasformazioni di Lorentz, calcolare in S' le densità di corrente e di carica nella lamina e il campo elettromagnetico in tutto lo spazio. (5 punti)
- Si diano le espressioni della densità di energia e di quantità di moto del campo elettromagnetico sia in S che in S' . (5 punti)
- Supponendo che la lamina sia infinitamente sottile, verificare le condizioni di (dis)continuità dei campi elettromagnetici attraverso i bordi orizzontali e verticali della lamina in S' . (4 punti)
- Si verifichi l'equazione di continuità della carica elettrica (in forma differenziale o integrale) lungo la lamina in S' (si consideri in particolare cosa succede attorno agli spigoli della lamina). (4 punti)

2

Un'onda elettromagnetica monocromatica piana di frequenza ω incide perpendicolarmente sulla superficie di un mezzo conduttore semi-infinito esteso per $x \geq 0$, che soddisfa la legge di Ohm $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ con σ reale e $\sigma \gg \varepsilon_0 \omega$.

- Scrivere la funzione dielettrica e l'indice di rifrazione del mezzo, mostrando che nel limite $\sigma \gg \varepsilon_0 \omega$ si ha $n \simeq n_0(1 + i)$ con n_0 reale. (6 punti)
- Sia E_t l'ampiezza del campo elettrico a $x = 0$ (non è necessario calcolarla in funzione dell'ampiezza dell'onda incidente). Calcolare, in funzione di E_t , il flusso di energia (mediato sul periodo) attraverso la superficie del mezzo e mostrare che eguaglia la potenza dissipata per effetto Joule nel volume (calcolata per unità di superficie). (9 punti)

NB Si scriva *chiaramente* e si giustifichi brevemente ogni passaggio; *risultati dati senza commento non saranno considerati*.

FORMULE UTILI E RICHIAMI DI TEORIA

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (1)$$

Equazione di continuità (ρ : densità di carica, $\mathbf{J}$: densità di corrente)

$$\partial_t \rho = -\nabla \cdot \mathbf{J}. \quad (2)$$

Definizione di permittività dielettrica ε_r per un mezzo lineare

$$\mathbf{P} = \varepsilon_0 \chi \mathbf{E}, \quad \varepsilon_r = 1 + \chi, \quad \varepsilon_r = \varepsilon_0 \varepsilon_r, \quad (3)$$

dove $\mathbf{P}$ è la densità di polarizzazione (momento di dipolo per unità di volume) e in generale $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$.

Teorema di conservazione dell'energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (4)$$

Teorema di conservazione della quantità di moto

$$\partial_t (\varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}) + \nabla \cdot \mathbf{T} = -\rho \mathbf{E} - \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (5)$$

dove $\mathbf{T}$ è il tensore degli stress di Maxwell.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \beta c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \beta \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Trasformazioni dei campi elettromagnetici per una trasformazione di Lorentz con $\beta = \beta \hat{\mathbf{x}}$

$$E'_x = E_x, \quad E'_y = \gamma(E_y - \beta B_z c), \quad E'_z = \gamma(E_z + \beta B_y c), \quad (7)$$

$$B'_x = B_x, \quad B'_y = \gamma(B_y + \beta E_z/c), \quad B'_z = \gamma(B_z - \beta E_y/c). \quad (8)$$

Relazione di dispersione di un mezzo con indice di rifrazione $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\omega)$ ovvero permittività $\varepsilon = \varepsilon(\omega) = \mathbf{n}^2$

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{\varepsilon(\omega)} = \frac{k^2 c^2}{\mathbf{n}^2(\omega)}. \quad (9)$$

Formula rapida per la media temporale del prodotto di due funzioni oscillanti $A(t)$ e $B(t)$ in funzione della loro rappresentazione complessa:

$$A(t) = \text{Re} \left(\tilde{A} e^{-i\omega t} \right), \quad B(t) = \text{Re} \left(\tilde{B} e^{-i\omega t} \right), \quad \langle A(t) B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A} \tilde{B}^*). \quad (10)$$

SOLUZIONI

1

a) Applicando le trasformazioni di Lorentz del quadrivettore $(\rho c, \mathbf{J})$ si ottiene

$$J'_x = \gamma J_x = \pm \gamma J, \quad J'_y = J_y = \pm J, \quad \rho' = -\gamma \frac{V}{c^2} J_x = -\pm \gamma \frac{V}{c^2} J, \quad (11)$$

dove $+$ e $-$ indicano i lati orizzontali superiore e inferiore per la direzione x e i lati sinistro e destro per la direzione y , rispettivamente. La corrente è quindi invariata sui lati verticali, mentre aumenta di un fattore γ sui lati orizzontali dove compare anche una densità di carica.

Applicando le trasformazioni dei campi EM si ottiene

$$B'_z = \gamma B_z = \gamma B_0, \quad E'_y = \gamma V B_z = \gamma V B_0. \quad (12)$$

b) Calcolando le densità di energia e quantità di moto secondo le definizioni, nei due sistemi

$$u = \frac{B_z^2}{2\mu_0}, \quad u' = \frac{B_z'^2}{2\mu_0} + \frac{\varepsilon_0 E_y'^2}{2} = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \gamma^2 \left(1 + \frac{V^2}{c^2}\right). \quad (13)$$

$$\mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{g} = \varepsilon_0 \mathbf{E}' \times \mathbf{B}' = -\varepsilon_0 \gamma^2 B_0^2 \mathbf{V} \quad (14)$$

c) Le condizioni di discontinuità sono quelle standard per i lati orizzontali, ovvero

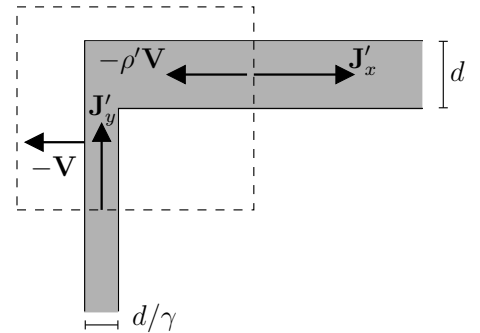
$$B'_{2\parallel} - B'_{1\parallel} = \mu_0 j'_{\text{sup}}, \quad E'_{2\perp} - E'_{1\perp} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \quad (15)$$

Ai lati verticali $E'_{\parallel}$ è discontinuo, perché essendo il lato mobile, il flusso del campo magnetico attraverso ogni cammino che attraversi la discontinuità non è costante:

$$(E'_{2\parallel} - E'_{1\parallel})\ell = -\frac{d}{dt}\Phi(\mathbf{B}') = -\frac{d}{dt}(B'_z X(t)\ell) = -V B'_z \ell. \quad (16)$$

d) Lungo i lati sia verticali che orizzontali la densità di corrente è uniforme, il che appare consistente con l'equazione di continuità $\nabla \cdot \mathbf{J}' = -\partial'_t \rho$ essendo la densità di carica indipendente dal tempo – almeno *localmente*, come discusso più in basso.

Essendo la corrente chiusa, negli spigoli si deve conservare il flusso della carica. Euristicamente, considerando una superficie chiusa S che racchiuda uno spigolo come in figura, al flusso Φ'_Q della carica contribuiscono la corrente nel lato orizzontale J'_x attraverso una larghezza d , la corrente nel lato verticale J'_y attraverso una larghezza d/γ per effetto della contrazione di Lorentz, e inoltre il trascinamento della densità di carica ρ' con velocità $-\mathbf{V}$ attraverso una larghezza d . Si ha quindi



$$\Phi'_Q = J'_x d - J'_y \frac{d}{\gamma} - \rho' V d = J d \gamma \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) - J \frac{d}{\gamma} = J \frac{d}{\gamma} - J \frac{d}{\gamma} = 0, \quad (17)$$

dove si è usato $(1 - V^2/c^2) = 1/\gamma^2$.

Si può obiettare che evidentemente Φ'_Q non è il flusso della densità di corrente e quindi la relazione precedente, per quanto fornisca il risultato atteso, non corrisponda “a vista” all’equazione di continuità. In effetti il trascinamento di carica distribuita nella regione in moto $X_2(t') > x' > X_1(t') = -Vt'$, essendo $X_1(t)$ e $X_2(t)$ le posizioni dei bordi verticali della lamina, porta ad una dipendenza dal tempo della densità di carica $\rho'(x', t')$. Possiamo infatti scrivere

$$\rho'(x', t') = \rho'(\Theta(x' - X_1(t')) - \Theta(X_2(t') - x')) , \quad (18)$$

con $\Theta(x)$ la funzione di Heaviside. Si ha $X_1(t) = -Vt$ e $X_2(t) = X_1(t) + L'$ dove L' è la lunghezza della lamina lungo x . Quindi

$$\partial_t \rho'(x', t') = -V \rho' \delta(\Theta(x' - X_1(t')) - \delta(X_2(t') - x')) , \quad (19)$$

dato che la derivata di $\Theta(x)$ è la delta di Dirac. Quindi, l’integrale sulla superficie S della figura, chiusa attorno allo spigolo di sinistra (ovvero intorno a $x' = X_1(t')$) fornisce

$$\int_S \partial_t \rho'(x', t') dx' dy' = -V \rho' d \int \delta(\Theta(x' - X_1(t'))) dx' = -V \rho' d . \quad (20)$$

L’equazione (17) mostra quindi che

$$\Phi'(\mathbf{J}') = J'_x d - J'_y \frac{d}{\gamma} = \rho' V d = - \int_S \partial_t \rho'(x', t') dx' dy' , \quad (21)$$

in accordo con l’equazione di continuità.

2

a) La relazione generale è

$$\varepsilon_r = 1 + \frac{i\sigma}{\varepsilon_0 \omega} , \quad (22)$$

come si può ottenere immediatamente dall’eguaglianza $\partial_t \mathbf{P} = \mathbf{J}$ scritta per componenti monocromatiche. Si ha $n^2 = \varepsilon_r$ e nel limite $\sigma \gg \varepsilon_0 \omega$

$$n \simeq (1 + i) \left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \omega} \right)^{1/2} . \quad (23)$$

In alternativa si può usare il consueto modello di elettrone libero classico basato sull’equazione

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E} - \nu \mathbf{v} , \quad (24)$$

che fornisce, nel limite $\nu \gg \omega$,

$$\varepsilon_r = 1 - \frac{\omega_p^2}{i\nu\omega} , \quad \sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu} = \frac{\varepsilon_0 \omega_p^2}{\nu} , \quad (25)$$

da cui ritroviamo la relazione generale tra ε_r e σ .

b) Scegliamo, senza perdere di generalità, una polarizzazione lineare lungo y . I campi EM (in notazione complessa) per $x \geq 0$ sono dati da

$$E_y = E_t e^{iknx - i\omega t}, \quad B_z = \frac{n}{c} E_t e^{iknx - i\omega t}, \quad (26)$$

dove $k = \omega/c$. Il flusso di energia è dato da

$$\langle S_x(0) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\varepsilon_0 c^2 E_y(0) B_z^*(0)) = \frac{\varepsilon_0 c}{2} |E_t|^2 \text{Re}(n) = \frac{c}{2\sqrt{2}} |E_t|^2 \left(\frac{\varepsilon_0 \sigma}{\omega} \right)^{1/2}. \quad (27)$$

La potenza dissipata per unità di volume è

$$\langle J_y E_y \rangle = \langle \sigma E_y E_y^* \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\sigma |E_y|^2) = \frac{\sigma}{2} |E_t|^2 \exp(-2k \text{Im}(n)x). \quad (28)$$

La potenza per unità di superficie si ottiene integrando lungo x

$$P = \int_0^\infty \langle J_y E_y \rangle dx = \frac{\sigma}{4k \text{Im}(n)} |E_t|^2 = \frac{\sigma c}{4\omega} \frac{1}{\left(\frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \omega} \right)^{1/2}} |E_t|^2 = \frac{c}{2\sqrt{2}} |E_t|^2 \left(\frac{\varepsilon_0 \sigma}{\omega} \right)^{1/2} = \langle S_x(0) \rangle. \quad (29)$$