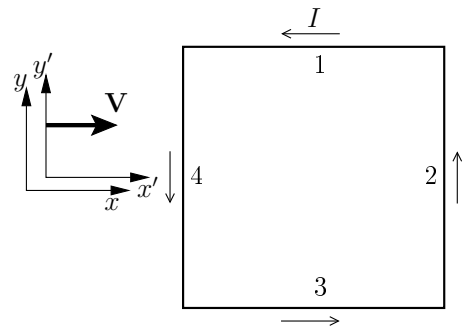


Corso di Laurea in Fisica
Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2A (09/05/2022)

1

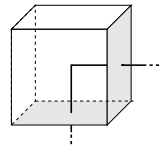
Nel sistema S del laboratorio si trova una spira quadrata di lato a , costituita da un filo di sezione costante A nel quale scorre l'intensità di corrente continua I corrispondente a una densità di corrente $J = I/A$ uniformemente distribuita. Il sistema S' è in moto con velocità $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$, parallela a due lati della spira. Calcolare



a) i campi elettrico e magnetico al centro della spira sia in S che S' (in S si può mostrare che $\mathbf{B} = \mu_0(2\sqrt{2}/\pi)(I/a)\hat{\mathbf{z}}$ con un calcolo esatto e/o usare un qualche ragionamento semplificato, discutendo l'approssimazione);

b) le densità di carica e corrente in S' all'interno del filo su ogni lato della spira e l'intensità di corrente corrispondente.

c) Considerare in S' una superficie chiusa attorno a uno spigolo della spira: discutere la conservazione della carica per tale superficie (si applichi l'equazione di continuità in forma integrale).



2

Nella regione compresa tra due piani perfettamente conduttori, posti a $x = \pm a/2$, si trova un campo elettromagnetico monocromatico di frequenza ω . Il campo elettrico ha la sola componente y ed ha una forma del tipo

$$E_y = E_y(x, t) = \text{Re} [E_0 f(x) e^{-i\omega t}] . \quad (1)$$

Determinare

a) l'espressione della funzione $f(x)$;

b) la pressione sulle pareti, stimando il valore di E_0 necessario a ottenere una pressione pari a $1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Nm}^{-2}$;

c) l'energia associata al campo elettromagnetico (per unità di superficie).

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Legge di Biot-Savart per il campo prodotto da un “segmento” infinitesimo di corrente

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\boldsymbol{\ell} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (3)$$

Campo magnetico al centro di una spira circolare di raggio b percorsa dalla corrente I

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{2b} \hat{\mathbf{n}}. \quad (4)$$

Campo generato da un dipolo magnetico $\mathbf{m}$ statico

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} [3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}]. \quad (5)$$

Teorema di conservazione dell'energia elettromagnetica

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \quad (6)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (7)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (8)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Pressione esercitata da un'onda elettromagnetica piana di intensità I su uno specchio perfetto a incidenza normale

$$P = 2I/c. \quad (9)$$

SOLUZIONI

1

a) Come approssimazione prendiamo il campo di una spira circolare di raggio b , percorsa dalla stessa corrente I e tale che l'area e quindi il momento magnetico siano li stessi della spira quadrata: questo richiede $\pi b^2 = a^2$ ovvero $b = a/\sqrt{\pi}$. Sostituendo nell'espressione per la spira circolare otteniamo

$$B_0 \simeq \frac{\mu_0 I}{2(a/\sqrt{\pi})} = \frac{\sqrt{\pi} \mu_0 I}{2 a} \quad (10)$$

che è già molto vicino al risultato esatto essendo $\sqrt{\pi}/2 \simeq 0.886$ mentre $2\sqrt{2}/\pi \simeq 0.900$. Un'approssimazione più rozza (e per eccesso) sarebbe considerare per ogni lato il campo di un filo infinito, ottenendo

$$B_0 \simeq 4 \frac{\mu_0 I}{2\pi(a/2)} = \frac{4 \mu_0 I}{\pi a} \quad (11)$$

con $4/\pi \simeq 1.273$.

Calcolo esatto: tutti i lati della spira giacciono sullo stesso piano, come pure la distanza $\mathbf{r}$ del centro O da qualunque punto della spira. Così tutti i contributi $d\mathbf{B}$ sono perpendicolari al piano e paralleli tra loro. Ogni lato del quadrato dà lo stesso contributo al campo magnetico $\mathbf{B}$ in O , quindi basta calcolare il contributo di un lato e moltiplicare il risultato per 4. Per la legge di Biot e Savart (3) ogni elemento $d\ell$ di lato dà un contributo

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\ell \times \mathbf{r}}{r^3} . \quad (12)$$

Dalla figura vediamo che il numeratore della seconda frazione della vale

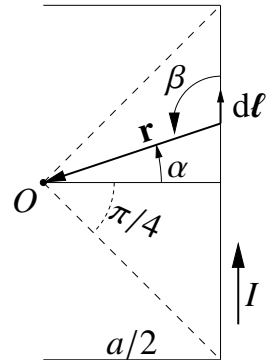
$$d\ell \times \mathbf{r} = \hat{\mathbf{z}} r \sin \beta d\ell , \quad (13)$$

dove $\hat{\mathbf{z}}$ è il versore uscente dalla pagina. Il modulo di $\mathbf{r}$ è $a/(2 \cos \alpha)$, mentre il modulo di $d\ell$ è

$$d\ell = d\left(\frac{a}{2} \tan \alpha\right) = \frac{a}{2} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} . \quad (14)$$

Così, notando dalla figura che $\sin \beta = \cos \alpha$, abbiamo

$$\begin{aligned} B &= 4 \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{8 \cos^3 \alpha}{a^3} \frac{a}{2 \cos \alpha} \frac{a}{2} \frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} \cos \alpha \\ &= 4 \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{2}{a} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{8I}{a} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \frac{\mu_0 I}{\pi a} , \end{aligned} \quad (15)$$



b) Assumo $\mathbf{V} = V\hat{\mathbf{x}}$. Per i lati paralleli a V , $J'_x = \mp\gamma J$ e $\rho' = -\gamma V J_x/c^2 = \pm\gamma V J/c^2$ dove i segni si riferiscono al lato superiore e inferiore, rispettivamente.

Per i lati perpendicolari a V , $J'_y = \mp J$ (dove i segni si riferiscono rispettivamente a lato sinistro e destro) e $\rho' = 0$.

I segni della densità di carica possono essere controllati pensando che nel centro $B_z > 0$ e per trasformazione dei campi $E'_y = -VB_z < 0$.

Per i lati paralleli a V , $I'_x = J'_x A = \gamma J A$. Per i lati perpendicolari a V , $I'_y = J_y A/\gamma = J A/\gamma$ (la contrazione delle lunghezze riduce la sezione di un fattore γ).

c) Consideriamo un volumetto che contenga lo spigolo in alto a sinistra. Il flusso di corrente all'interno del volumetto è

$$I'_x - I'_y = J A \left(\gamma - \frac{1}{\gamma} \right) = J A \gamma \frac{V^2}{c^2} \quad (16)$$

La variazione della carica contenuta all'interno del volumetto è dovuta al trascinamento della carica situata sul lato orizzontale (x):

$$\frac{dQ'}{dt'} = \rho' V A = J A \gamma \frac{V^2}{c^2} \quad (17)$$

2

a) Inserendo nell'equazione d'onda

$$\left(\partial_x^2 - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \right) E_y = 0 \quad (18)$$

si ottiene $f''(x) = -(\omega^2/c^2)f(x)$ con soluzione generale

$$f(x) = A e^{ikx} + B e^{-ikx}, \quad k = \omega/c \quad (19)$$

Imponendo $f(\pm a/2) = 0$ si ha $f(x) = \cos((2m+1)\pi x/a)$ con $m = 0, 1, 2, \dots$, oppure $f(x) = \sin(2n\pi x/a)$ con $n = 1, 2, \dots$. Le frequenze permesse sono $\omega = \ell\pi c/a$ con $\ell = 1, 2, \dots$

b) Il campo si può vedere come due onde monocromatiche contropropaganti di ampiezza $E_0/2$ e intensità $I = \varepsilon_0 c (E_0/2)^2$, da cui la pressione $P = 2I/c = \varepsilon_0 E_0^2/2$.

Come ordine di grandezza

$$E_0 \simeq 10^6 \text{ V m}^{-1} \quad (20)$$

c) Prendiamo un modo “pari” con $E_y = \text{Re}(E_0 \cos((2m+1)\pi x/a) e^{-i\omega t})$. Dall'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ si ottiene il campo magnetico

$$B_z = \text{Re} \left(-i \frac{E_0}{c} \sin((2m+1)\pi x/a) e^{-i\omega t} \right) \quad (21)$$

da cui la densità di energia EM

$$\begin{aligned} u^2 &= \left\langle \frac{\varepsilon_0}{2} E_y^2 + \frac{1}{2\mu_0} B_z^2 \right\rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \cos^2((2m+1)\pi x/a) + \frac{1}{2\mu_0 c^2} E_0^2 \sin^2((2m+1)\pi x/a) \right) \\ &= \frac{\varepsilon_0}{2} E_0^2 \end{aligned} \quad (22)$$

dove si è usato $\varepsilon_0 \mu_0 = 1/c^2$. Per unità di lunghezza

$$U = ua = Pa . \quad (23)$$