

Corso di Laurea in Fisica

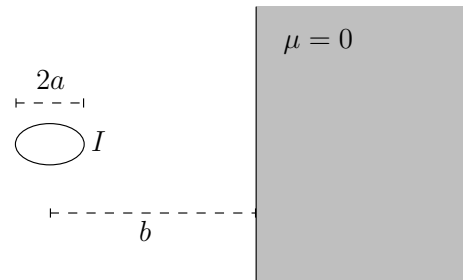
Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2A (30/05/2022)

1

Una spira circolare di raggio a , nella quale scorre la corrente continua I , si trova a distanza $b \gg a$ da un materiale perfettamente diamagnetico che riempie il semispazio $x > 0$. Il piano della spira è ortogonale alla superficie del materiale.

- a) Si descriva il campo magnetico in tutto lo spazio.
b) Calcolare la forza sulla spira, specificandone il segno.
c) Di quanto varia l'energia del sistema se si gira la spira di 90° ?



2

Un'onda elettromagnetica monocromatica piana linearmente polarizzata avente frequenza ω , il cui campo elettrico è dato da

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(x, t) = \text{Re} \left(E_0 \hat{\mathbf{y}} e^{ikx - i\omega t} \right), \quad k = \omega/c, \quad (1)$$

incide su una sferetta di raggio $a \ll \lambda = 2\pi c/\omega$ costituita da un metallo di permittività dielettrica

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i \frac{\nu \omega_p^2}{\omega^3}, \quad (2)$$

dove $\omega_p = (n_e e^2 / \varepsilon_0 m_e)^{1/2}$ è la frequenza di plasma (con n_e la densità di elettroni liberi nel conduttore) e $\nu \ll \omega$.

Posto inizialmente $\nu = 0$, calcolare:

- a) il momento di dipolo indotto nella sferetta indicando per quale frequenza ha valore massimo, dando una stima numerica di tale frequenza per l'Alluminio (valenza $Z = 3$, peso atomico $\simeq 27$, densità di massa $2.7 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$);
b) la potenza totale diffusa (mediata sul periodo) P_d e la sezione d'urto di diffusione $\sigma_d = P_d/I$ (con I intensità dell'onda incidente), mostrando che si può scrivere $\sigma_d \propto \pi a^2 (a/\lambda)^n$ con n esponente da determinare.
c) Assumendo ora $\nu \neq 0$, calcolare la potenza assorbita dalla sferetta (si ricordi la relazione $\mathbf{J} = \partial_t \mathbf{P}$).

FORMULE UTILI

Costanti fisiche

$$\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{12} \text{ F/m} , \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 , \quad \mu_0 \varepsilon_0 = 1/c^2 , \quad (k_0 = 1/(4\pi \varepsilon_0)) . \quad (3)$$

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}) . \quad (4)$$

Campo elettrico interno a una sfera dielettrica con permittività ε_r in campo elettrico esterno $\mathbf{E}_0$

$$\mathbf{E}_{\text{int}} = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r + 2} . \quad (5)$$

Energia potenziale “meccanica” di un dipolo magnetico $\mathbf{m}$ in presenza di un campo magnetostatico $\mathbf{B}$

$$U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B} . \quad (6)$$

Campo statico di dipolo magnetico

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m} \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{m}}{r^3} \quad (7)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (8)$$

Teorema di conservazione dell’energia

$$\partial_t \left(\frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) + \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0 , \quad (9)$$

dove $\mathbf{S} = \varepsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$.

Formula rapida per la media temporale di un prodotto di campi oscillanti scritti in notazione complessa come $A(t) = \text{Re}(\tilde{A}e^{-i\omega t})$ e $B(t) = \text{Re}(\tilde{B}e^{-i\omega t})$

$$\langle A(t)B(t) \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\tilde{A}\tilde{B}^*) , \quad \langle A^2(t) \rangle = \frac{1}{2} |\tilde{A}|^2 . \quad (10)$$

Numero di Avogadro

$$N_A = 6.02 \times 10^{23} . \quad (11)$$

SOLUZIONI

1

a) Essendo la spira piccola rispetto a b la si può considerare come un dipolo magnetico $\mathbf{m} = m\hat{\mathbf{y}}$ con $\mathbf{m} = \pi a^2 I$.

La soluzione si trova col metodo delle immagini, ponendo un dipolo immagine $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$ in posizione speculare rispetto al piano $x = 0$.

La forza è repulsiva essendo i dipoli paralleli. Questo si può verificare analiticamente calcolando intanto l'energia di interazione $U = -\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ dove $\mathbf{B}$ è il campo dovuto ad un dipolo $\mathbf{m}'$ posto a distanza b lungo x , quindi

$$U = -\frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}' \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{m}'}{(2b)^3} \right] = \frac{\mu_0 m^2}{64\pi b^3}, \quad (12)$$

dove si è posto $\mathbf{m}' = \mathbf{m}$, si è tenuto conto del fatto che $\mathbf{m} \parallel \mathbf{m}' \perp \hat{\mathbf{x}}$, e si è inserito un fattore $1/2$ per tener conto che abbiamo un dipolo immagine. Derivando rispetto a b si ottiene

$$F = -\frac{dU}{db} = -\frac{3\mu_0 m}{64\pi b^4} < 0 \quad (13)$$

cioè il dipolo tende ad allontanarsi dal piano.

b) L'energia della configurazione con i dipoli verticali $U_{\uparrow}$ è data dalla (12). Se il dipolo viene ruotato in modo da essere parallelo a $\hat{\mathbf{x}}$, il dipolo immagine ruota in direzione opposta ovvero, $\mathbf{m}' = -\mathbf{m}$, quindi

$$U_{\rightarrow} = -\frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{m}' \cdot \hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{m}'}{(2b)^3} \right] = -\frac{1}{2}\mathbf{m} \cdot \left[\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{-2\mathbf{m}}{(2b)^3} \right] = \frac{\mu_0 m^2}{32\pi b^3}, \quad (14)$$

dove si è inserito il solito fattore $1/2$ per tener conto che abbiamo un dipolo immagine. Quindi per ruotare il dipolo occorre compiere un lavoro $W = -U_{\uparrow} + U_{\rightarrow} = \mu_0 m^2 / (64\pi b^3)$.

2

a) Dato che $a \ll \lambda$ si può usare la formula per il caso statico

$$\mathbf{E}_i = \frac{3\mathbf{E}_0}{\varepsilon_r + 2}, \quad \mathbf{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\mathbf{E}_i, \quad (15)$$

dove $\mathbf{E}_i$ è il campo elettrico all'interno della sfera e $\mathbf{P}$ la polarizzazione per unità di volume. Si ha risonanza per $\varepsilon_r + 2 = 0$ ovvero $\omega = \omega_p / \sqrt{3}$

Il numero di elettroni liberi per unità di volume si ottiene moltiplicando per 3 il numero di atomi per unità di volume, a sua volta dato dalla densità di massa moltiplicata N_A diviso il peso atomico

$$n_e = \frac{3(2.7 \times 10^6)(6 \times 10^{23})}{27} \simeq 1.8 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \quad (16)$$

$$\omega_p \simeq 6 \times 10^{16} \text{ s}^{-1} \quad (17)$$

Notare che l'autoconsistenza delle approssimazioni in risonanza richiede $a \ll 2\pi c/(\omega_p/\sqrt{3}) = 5 \times 10^{-8}$ m ovvero una sfera nanometrica ($a \simeq 10^{-9}$ m).

b) Il momento di dipolo elettrico della sferetta è

$$\mathbf{p} = \frac{4\pi}{3}a^3\mathbf{P} = 4\pi\epsilon_0a^3\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2}\mathbf{E}_0, \quad (18)$$

e la corrispondente potenza irradiata

$$P_d = \frac{2k_0}{3c^2} \langle \dot{\mathbf{p}}^2 \rangle = \frac{k_0}{3c^2} \omega^4 \left(4\pi\epsilon_0a^3\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2} \right)^2 |\mathbf{E}_0|^2. \quad (19)$$

Dato che $I = \langle \mathbf{S} \rangle = \epsilon_0 c |\mathbf{E}_0|^2 / 2$, si ha

$$P_d = \frac{8}{3}\pi a^2 \left(\frac{\omega a}{c} \right)^4 \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2} \right)^2 = \frac{32\pi^2}{3} \pi a^2 \left(\frac{a}{\lambda} \right)^4 \left(\frac{\epsilon_r-1}{\epsilon_r+2} \right)^2. \quad (20)$$

c) La potenza assorbita è

$$\begin{aligned} P_d &= \frac{4\pi}{3}a^3 \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{4\pi}{3}a^3 \langle \partial_t \mathbf{P} \cdot \mathbf{E} \rangle \\ &= \frac{4\pi}{3}a^3 \frac{1}{2} \text{Re} (-i\omega\epsilon_0(\epsilon_r-1)\mathbf{E}_i\mathbf{E}_i^*) = \frac{2\pi}{3}a^3\epsilon_0|\mathbf{E}_i|^2\omega\text{Im}(\epsilon_r) \\ &= \frac{2\pi}{3}a^3\epsilon_0\nu\frac{\omega_p^2}{\omega^2}|\mathbf{E}_i|^2. \end{aligned} \quad (21)$$