

Corso di Laurea in Fisica

Anno Accademico 2021-2022

Compito di Fisica 2A (02/05/2022)

1

Una particella di carica q e massa m si muove nel piano xy sotto l'azione di un potenziale armonico $U(r) = m\omega_0^2 r^2/2$ con $r^2 = x^2 + y^2$.

- a) Supponendo che la particella compia un'orbita circolare di raggio $r = a$, si caratterizzi la radiazione emessa (dandone la frequenza, la potenza irradiata, la polarizzazione rilevata per emissione in direzione x o z rispettivamente) trascurando la perdita di energia per irraggiamento.
- b) Assumendo che la perdita di energia per periodo dell'orbita circolare sia non trascurabile ma piccola rispetto all'energia totale, si calcoli la variazione temporale del raggio $a = a(t)$.

2

Un'onda elettromagnetica piana, monocromatica di frequenza ω , con campo elettrico

$$\mathbf{E} = \text{Re} \{ E_0 e^{i(kx - \omega t)} \} \hat{\mathbf{y}}, \quad (1)$$

si propaga in direzione $\hat{\mathbf{x}}$ in un mezzo con indice di rifrazione reale $n > 1$ in quiete nel sistema del laboratorio S .

- a) Calcolare la direzione e l'ampiezza (B_0) del campo magnetico dell'onda in funzione di E_0 e n .
- b) Calcolare le ampiezze dei campi EM, la frequenza e il vettore d'onda in un sistema S' che si muova lungo x con velocità $\mathbf{V} = (c/n)\hat{\mathbf{x}}$ rispetto a S .

3

Una vela solare può essere modellizzata come uno specchio sottile di area A e densità superficiale $\sigma = \rho d$ dove ρ è la densità di massa e d lo spessore della vela. Si assume che lo specchio sia perfettamente riflettente nella banda del visibile e che in questa banda la potenza totale emessa dal Sole sia $P_\odot$. Sono note la massa del Sole $M_\odot \simeq 2 \times 10^{30}$ kg e la costante gravitazionale $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³kg⁻¹s⁻².

- a) Mostrare che per valori sufficientemente piccoli di σ la vela viene accelerata verso l'esterno del sistema solare. Si dia una stima numerica (ordine di grandezza!) del valore di soglia per σ usando i valori del raggio medio dell'orbita terrestre $r_T \simeq 1.5 \times 10^{11}$ m e dell'intensità media della luce solare sulla Terra $I_T \simeq 1.6 \times 10^3$ W/m².
- b) Supponendo che la forza di gravità sia trascurabile rispetto a quella dovuta alla pressione di radiazione, si calcoli la velocità raggiunta dalla vela partendo dall'orbita terrestre di raggio r_T . Si dia una stima numerica assumendo $\sigma = 10^{-4}$ kg m⁻².

FORMULE UTILI

Equazioni di Maxwell

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\partial_t \mathbf{B}, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{J} + \varepsilon_0 \partial_t \mathbf{E}). \quad (2)$$

Campo di radiazione di dipolo elettrico $\mathbf{p}(t)$

$$\mathbf{E}_e = k_0 \frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_{\text{rit}}) \times \mathbf{r} \times \mathbf{r}}{rc^2} \quad (3)$$

Potenza istantanea irradiata per emissione di dipolo elettrico $\mathbf{p} = \mathbf{p}(t)$

$$P_{\text{irr}} = \frac{2k_0}{3c^3} |\ddot{\mathbf{p}}|^2 \quad (4)$$

Relazione di dispersione per un mezzo con indice di rifrazione $n = n(\omega)$

$$\omega^2 = \frac{k^2 c^2}{n^2} \quad (5)$$

Trasformazioni di un quadrivettore $A_\mu = (A_0, \mathbf{A})$ per una trasformazione di Lorentz con velocità $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$

$$A'_0 = \gamma(A_0 - \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{A}), \quad A'_\parallel = \gamma(A_\parallel - \beta A_0), \quad \mathbf{A}'_\perp = \mathbf{A}_\perp, \quad (6)$$

dove le direzioni $\parallel$ e $\perp$ sono riferite a $\mathbf{V}$ e $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

Formule compatte per la trasformazione di Lorentz del campo elettromagnetico

$$E'_\parallel = E_\parallel, \quad E'_\perp = \gamma(E_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}c) \quad B'_\parallel = B_\parallel, \quad B'_\perp = \gamma(B_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}/c). \quad (7)$$

dove $\mathbf{V} = \boldsymbol{\beta}c$ è la velocità del sistema S' rispetto al sistema S , “ $\parallel$ ” e “ $\perp$ ” sono riferite a $\mathbf{V}$.

Pressione esercitata da un'onda elettromagnetica piana di intensità I su uno specchio perfetto a incidenza normale

$$P = 2I/c \quad (8)$$

SOLUZIONI

1

a) L'accelerazione centripeta $a_r = -\omega^2 r$ è dovuta alla forza elastica $f_r = -kr = -m\omega_0^2 r$, quindi posto $ma_r = f_r$ otteniamo $\omega = \omega_0$. Alternativamente basta proiettare l'equazione di Newton lungo x e y , ottenendo due equazioni di oscillatori armonico che, per sfasamento di $\pi/2$ tra le due direzioni, danno un'orbita circolare.

Il momento di dipolo $\mathbf{p} = q\mathbf{r}$ ruota nel piano xy con velocità angolare ω_0 . Si ha quindi radiazione di dipolo elettrico alla frequenza ω_0 . La polarizzazione è parallela alla proiezione del dipolo nel piano ortogonale alla direzione di osservazione, per cui è lineare se osservata nel piano xy e circolare se osservata lungo z . In formule basta osservare che il campo di radiazione $\mathbf{E}_{\text{rad}} \propto (\mathbf{p} \times \hat{\mathbf{n}}) \times \hat{\mathbf{n}}$ con $\hat{\mathbf{n}}$ la direzione di osservazione. Prendendo $\mathbf{p} = qa(\hat{\mathbf{x}} \cos \omega_0 t + \hat{\mathbf{y}} \sin \omega_0 t)$ e $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ o $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ si ottiene la direzione di $\mathbf{E}$.

La potenza emessa è

$$P = \frac{2k_0}{3c^3} q^2 \omega_0^4 a^2 \quad (9)$$

b) Per tempi brevi rispetto al tempo di spiraleggiamento l'orbita può essere approssimata come circolare con raggio $a = a(t)$. L'energia totale della particella è

$$\mathcal{E} = \frac{m}{2} v^2 + \frac{m}{2} \omega_0^2 r^2 = m\omega_0^2 a^2 \quad (10)$$

essendo $r = a$ e $v = a\omega_0$. Posto $d\mathcal{E}/dt = -P$ si ha

$$2m\omega_0^2 a \frac{da}{dt} = -\frac{2k_0}{3c^3} q^2 \omega_0^4 a^2 \quad (11)$$

ovvero

$$\frac{da}{dt} = -\frac{2k_0 q^2}{3mc^3} \omega_0^2 a \simeq -\frac{a}{\tau} \quad (12)$$

con soluzione $a(t) = a(0)e^{-t/\tau}$.

2

a) Usando l'equazione $\partial_t \mathbf{B} = -\nabla \times \mathbf{E}$ otteniamo $-i\omega \mathbf{B}_0 = -\hat{\mathbf{z}}(\partial_x E)$ ovvero

$$\mathbf{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \hat{\mathbf{z}} e^{i(kx - \omega t)} = \frac{n}{c} E_0 \hat{\mathbf{z}} e^{i(kx - \omega t)} \equiv B_0 \hat{\mathbf{z}} e^{i(kx - \omega t)} \quad (13)$$

dove si è usato $\omega/k = c/n$.

b) Per un boost lungo $\hat{\mathbf{x}}$ con velocità $V = c/n$ si ha

$$\omega' = \gamma(\omega - kV) = 0, \quad k' = \gamma(k - \omega V/c^2) = k/\gamma \quad (14)$$

Dalla legge di trasformazione del campo elettrico $\mathbf{E}' = \gamma(\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$ si ha per la componente non nulla

$$E'_y = \gamma(E_y - VB_z) = 0 \quad (15)$$

Il valore del campo magnetico si può ottenere dalla trasformazione analoga oppure dall'invariante di Lorentz

$$E^2 - c^2 B^2 = E_0^2(1 - c^2/V^2) < 0 \quad (16)$$

da cui, in S' dove $E' = 0$, otteniamo $B'_0 = B_0/\gamma$.

3

a) La forza esercitata dalla pressione della luce solare sulla vela è

$$f_L = 2 \frac{I_\odot}{c} A \quad (17)$$

dove $I_\odot$ è l'intensità della luce solare. Per conservazione dell'energia si ha $I_\odot = P_\odot/(4\pi r^2)$ dove r è la distanza dal centro del Sole. La forza gravitazionale sulla vela è data da

$$f_g = -G \frac{M_\odot m_v}{r^2} = -G \frac{M_\odot}{r^2} (\sigma A) \quad (18)$$

Posto quindi $f_L + f_g > 0$ otteniamo, indipendentemente da r e A

$$\sigma < 2 \frac{P_\odot}{4\pi c G M_\odot} \quad (19)$$

Poiché

$$P_\odot = 4\pi r_T^2 I_T \simeq 4\pi \times 3.6 \times 10^{25} \text{ W} \quad (20)$$

si ha

$$\sigma < \frac{2(3.6 \times 10^{25})}{(3 \times 10^8)(6.67 \times 10^{-11})(2 \times 10^{30})} \simeq 2 \times 10^{-3} \text{ kg m}^{-2} \quad (21)$$

b) Trascurando la gravità l'equazione del moto della vela è

$$m_v \frac{dr}{dt} = 2 \frac{P_\odot}{4\pi r^2 c} A = -\frac{d}{dr} \left(\frac{r_T^2 I_T}{rc} A \right) \quad (22)$$

L'energia acquistata all'infinito partendo da $r = r_T$ è

$$K = \left(\frac{r_T^2 I_T}{rc} A \right)_{r=r_T} = \frac{r_T I_T}{c} A \quad (23)$$

Posto $K = m_v V^2/2 = \sigma A V^2/2$ si ha infine

$$V = \left(\frac{2r_T I_T}{\sigma c} \right)^{1/2} \simeq 1.2 \times 10^5 \text{ m s}^{-1} \quad (24)$$